

III

رقم ٤٩

المكان يخدمه وفلديه







# الجزء الثالث

## من كتاب التحفة البهية في الاصول الهندسية

وهو مقر الدروس الهندسية لتلامذة السنة الثالثة بمدرسة الصبغية

تأليف

المرحوم أحمد بك عظيم

ناظر مدرسة دار العلوم وقلم الترجمة

(تتبعه)

وان كان في خطبة الكتاب في الجزء الاول ان الزيادات غير من الاصل بكتابتها بحروف دقيقة  
غير ان مقتضيات الاحوال اوجبت تمييزها بوضع نجوم قبلها في أوائل السطور فليتب

( الطبعة الثانية )

لطبعة الكبرى الاميرية بيولاقي مصر المحمسة

في أوائل ربيع الاول سنة ١٣١٢

هجري





بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

## الجزء الثالث

في المستوى والزوايا المجسمة والكرة وكثيرات السطوح

### الباب الاول

( في المستوى والزوايا المجسمة )

### الفصل الاول

( في المستوى وتعيينه )

(٢٠٢) المستوى هو كما تقدم (٩) سطح غير محدود ينطبق عليه المستقيم كمال الانطباق في جميع جهاته

(٢٠٣) ويعين وضعه

أولاً - بكل ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة لأنه تقدم في (نمرة ١١) ان مثل هذه النقاط الثلاث لا يمكن أن يمر بها المستوي واحد

فعلى هذا كل مستقيمين متقاطعين يتعين بهما وضع مستوي وكذلك يتعين بكل مستقيم ونقطة خارجة عنه وان أي جزء من مستوي يمكن أن ينطبق على أي جزء آخر منه أو من مستوي آخر

ثانيا - بكل مستقيمين متوازيين لانه يؤخذ من تعريفهما وجودهما في مستوى واحد وغير ذلك حيث ان هذا المستوى يشتمل طبعاً على أحدهما وعلى نقطة من الثاني فلا يمكن أن يمر بهما غيره ومما ذكره نستنتج النتائج الآتية

الاولى - كل مستقيمين غير موجودين في مستوى واحد أي لو مررنا مستويًا بأحدهما وكان قاطعاً للثاني فلا يقال لهما متوازيان ولا متقاطعان ومن هنا يعلم أن من أي نقطة فراغية لا يمكن تقرير المستقيم واحد يوازي آخر معلوماً

الثانية - لا يمكن أن يكون تقاطع أي مستويين المستقيماً لانه ان لم يكن كذلك لوجدنا الأقل على خط تقاطعهما ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة وأذن فيمتد ان معا وبصير ان مستويًا واحداً وهو مغاير للعرض

الثالثة - يمكن أن تصور تولد المستوى اما من حركة مستقيم مار بنقطة معلومة ومتكئ على مستقيم معلوم واما من حركة مستقيم بالتوازي لنفسه ومتكئ على آخر معلوم

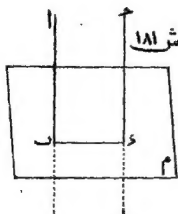
## الفصل الثاني

### (في المستقيمتين والمستويات المتوازية)

(٢٠٤) المستقيم والمستوى المتوازيان أو المستويان المتوازيان هما اللذان مهما امتدا لا يلتقيان أصلاً

### دعوى نظرية

(٢٠٥) المستوى القاطع لأحد مستقيمين متوازيين يكون قاطعاً للثاني والموازي لأحدهما يكون موازياً للثاني (شكل ١٨١)



أولاً - إذا كان المستوى م قاطعاً لأحد المستقيمين المتوازيين أ ب مثلاً في نقطة ب يكون قاطعاً للثاني د د والوصول الى ذلك يكفي البرهنة على أن المستوى م لا يحتوى على المستقيم د د ولا يوازيه فإذا احتوى المستوى م المستقيم د د فن حينئذ انه يحتوي زيادة على ذلك على نقطة ب من المستقيم أ ب



نتيجة ٤ - (شكل ١٨٣) المستويان م و د الماران بالمستقيمين هـ و ح ط المتوازيين يقطعان في مستقيم هـ و مواز لكل واحد من المستقيمين المذكورين

لان المستقيم المار بنقطة ه احدى نقط خط تقاطع المستويين بالتوازي لكل واحد من المستقيمين د و ح ط يجب أن يكون موجودا في كلا المستويين واذن يكون هو خط تقاطعهما

نتيجة ٥ - (شكل ١٨٢) كل مستقيم مثل ا ب يوازي آخر د و موجودا بتمامه في مستوى م يكون موازيا لهذا المستوى  
لانه اذا قطع المستوى م المستقيم ا ب فانه يقطع الموازي له د و ولا يكون اذن موجودا بتمامه في المستوى وهو مغاير للغرض

### دعوى نظرية

(٢٠٦) المستقيمان الموازيان لمستقيم ثالث متوازيان (شكل ١٨٤)

لفرض أن المستقيمين ا ب و د موازيان للمستقيم هو

أولا - لا يمكن أن يتقاطع المستقيمان ا ب و د و ح د

لانه لو حصل ذلك لأمكن من نقطة فراغية مده مستقيمين

موازيين لثالث وهو محال (نتيجة ١)

ثانيا - ان المستقيمين المذكورين موجودان في مستوى

واحد لانه اذا قطع المستوى ح مثلا المار بالمستقيم ا ب

بنقطة د المستقيم د و فانه يقطع ضرورة الموازي له ه و واذن يقطع أيضا المستقيم

ا ب الموازي هو و بناء عليه فلا يكون مشترعا عليه وهو مغاير للغرض

### دعوى نظرية

(٢٠٧) خطا تقاطع مستويين متوازيين مستقيمان

متوازيان (شكل ١٨٥)

ليكن المستوى د قاطعا للمستويين المتوازيين م و ح و ح

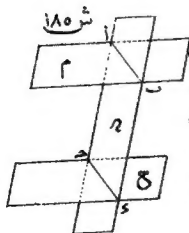
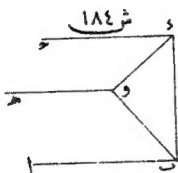
فالمستقيمان ا ب و د الموجودان في المستوى د

لا يمكن أن يتلاقيا لوجودهما أيضا في مستويين متوازيين

واذن فهما متوازيان

نتيجة - المستقيمتان المتوازيان المحصورتان بين مستويين

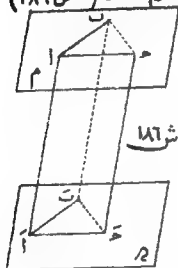
متوازيين هي متساوية



فالمستقيمان  $a$  و  $b$  المتوازيان المحصوران بين المستويين  $m$  و  $n$  المتوازيين متساويان لان الوترين  $ab$  المستوي  $n$  فانه يقطع المستويين المتوازيين  $m$  و  $n$  في المستقيمين المتوازيين  $ab$  و  $cd$  واذن فيكون الشكل  $abcd$  متوازي أضلاع ويكون فيه  $a = b$  وهو المطلوب

### دعوى نظرية

(٢٠٨) كل نقطة مفروضة يمكن أن يمر بها مستو واحد مواز للمستويين  $m$  و  $n$  (شكل ١٨٦)



ش ١٨٦

لتكن  $a$  النقطة المفروضة خارج المستوي  $n$   
أولاً - يمدن نقطة  $a$  مستقيماً  $ab$  و  $a$  موازيين  
بالنظر للمستقيمين  $ab$  و  $cd$  الكائنين في المستوي  
المعلوم فيكونان موازيين لهذا المستوي (٢٠٥ نتيجة ٥)  
ويكون مستويهما  $ab$  موازاً للمستوي  $ab$   
لانه ان لم يكن كذلك لكان في مستقيموازي كل واحد من  
المستقيمين المتقاطعين  $ab$  و  $a$  (٢٠٥ نتيجة ٤)  
وهو محال

ثانياً - لو فرض تمرير مستواً آخر من نقطة  $a$  موازاً للمستوي  $ab$  خلاف المستوي  
 $ab$  فانا نتصور من نقطة  $a$  تمرير مستو قاطع للمستويات الثلاثة فيقطع المستويين المارين  
بنقطة  $a$  في مستقيمين مارين منها موازيين للمستقيم الذي يتقاطع فيه المستوي القاطع بالمستوي  
المعلوم (٢٠٥ نتيجة ٣) وهو محال

نتيجة ١ - المحل الجامع للمستقيمت المارة من نقطة واحدة بالتوازي استوى معلوم هو مستو  
مواز للمستوي المذكور

وذلك لان اثنين منها يتعينهما مستو مواز للمستوي المعلوم وحيث انه لا يمكن أن يمر بالنقطة  
المفروضة الامستو واحد موازى المستوي المذكور فتكون جميع هذه المستقيمت موجودة  
في مستو واحد موازى المستوي المعلوم

نتيجة ٢ - اذا قطع مستواً أحده مستويين متوازيين فانه لابد أن يقطع الثاني

نتيجة ٣ - اذا قطع مستقيم أحده مستويين متوازيين فانه لابد أن يقطع الثاني

لانا اذا مررنا بهذا المستقيم مستوياً فانه يقطع المستويين المتوازيين في مستقيمين متوازيين

وحيث ان المستقيم العلوي يقطع أحد هذين المستقيمين المتوازيين فإنه يقطع الثاني وأذن يقطع  
المستوى الشامل على هذا المستقيم

نتيجة ٤ - المستقيم أو المستوى الموازي لأحد مستويين متوازيين يكون موازيا للثاني لأنه إذا قطعناه فإنه يقطع الثاني وبناء عليه فالمستويان الموازيان لثالث متوازيان

## دعوى نظرية

(٢٠٩) الزاويتان الغير الموجودتين في مستو واحد اللتان أضلاعهما المتناظرة متوازية ومتجهية في اتجاه واحد تكونان متساويتين ويكون مستوياهما متوازيين (شكل ١٨٦)

لكن اب موازى ا ب ومقدمه فى الجهة ، ا ح موازى ا د ومقدمه ايضا معه  
 فى الجهة فتأخذ ا ب = ا د ، ا ح = ا د فنصل ب د ، و ب د ، و د ح  
 فالشكل اب ا ب يكون متوازى الاضلاع لان فيه الضلعين المتقابلين اب ، ا ب متوازيان  
 ومتساويان وحينئذ يكون الضلعان ا ح ، ب د متوازيين ومتساويين ايضا وبمثل ذلك  
 يبرهن على ا ن ح د ، و ا ا متوازيان ومتساويان واذن يكون ب د ، و د ح متوازيين  
 ومتساويين ويكون الشكل ب د ح د متوازى الاضلاع ويكون فيه ب د = ب د  
 وموازيه وحينئذ فالثلثان ا ب ح و ا ر د متساويان لتساوى الاضلاع الثلاثة للناظرة  
 فيهما وينتج من تساويهما ا ن الزاوية با ح = الزاوية ر ا د

وأما أوزي مستويهما فهو ناتج من النظرية المتقدمة (٢٠٨)

تنبيه - إذا اختلف ضلعان زاوية  $A$  في الجهة مع ضلعى زاوية  $A$  مع بقاء التوازي بينهما فإن الزاوية التى تحدث بين مثل هذين الضلعين تكون زاوية  $A$  أو مساوية لزاوية  $A$  وأما إذا اختلف ضلعان من أضلاع الزاويتين المذكورتين في الجهة واختلف الضلعان الآخران فيها فإن الزاوية التى تحدث بين مثل هذين الضلعين تكون مكملة لزاوية  $A$  أو لزاوية  $A$

نتيجة - إذا فرض مستقيمان  $a$  و  $b$  موضوعان بطريقة ما في الفراغ فإنه يطلق على الزاوية الحادثة بين المستقيمين المارين من أي نقطة بالتوازي للمستقيمين المقروطين اسم زاوية المستقيمين المتوازيين

ولاحظ أن يكون هذا التعريف عامًا يجب أن يبرهن على أن هذا الزاوية غير مطبوع النقطة التي اختيرت لتد المستقيمين المتوازيين وهذا أمر ينتج من النظرية المتقدمة

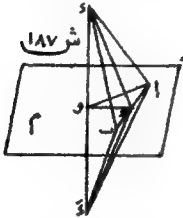
## الفصل الثالث

### (في المستقيمات والمستويات المتعلمة)

#### دعوى نظرية

(٢١٠) كل مستقيم عمودى على مستقيمين من مستوي يكون عمودا على أى مستقيم من المستوى المذكور (شكل ١٨٧)

وهذه الدعوى على ثلاثة أحوال



الحالة الاولى - ان يكون المستقيم د و عمودا على المستقيمين وا و ب المائتين من موقعه في المستوى (موقع العمود على المستوى هو نقطة تقابله به) ويطلب البرهنة على أنه عمود على أى مستقيم مثل و ح مارين موقعه وفي المستوى المذكور

ولذلك يدعى العمود د و تحت المستوى بمقدار د = و و ثم تقطع المستقيمتان الثلاثة وا و ب و د و بالمستقيم ا ح و يتوصل النقطتان د و ب بكل واحدة من النقط الثلاث ا و ب و ح فالمستقيمان ا د و ا ح متساويان لوجود نقطة ا على العمود ا و القائم على منتصف د و ومثلهما المستقيمان ب د و ب ح واذن فالمثلثان د ا ب و د ا ب متساويان لتساوى الاضلاع الثلاثة المتناظرة فيهما ثم اذا دور المثلث د ا ح حول الضلع ا ح فانه يمكن وضع نقطة د على نقطة ب وحيث ان نقطة ح ثابتة في أثناء الحركة فينتطبق الضلع د ح على الضلع ب ح و يساويه وحيث يكون المثلث د ح و متساويا السابقين وحيث ان المستقيم ح و واصل من رأسه الى منتصف قاعدته فيكون عمودا عليها (٢٠٩ مثال)

الحالة الثانية - أن يكون المستقيم د و عمودا على المستقيمين وا و ب المارين من موقعه في المستوى ويطلب البرهنة على أنه عمود على أى مستقيم مثل ب ح من المستوى المذكور ولبرهنة على ذلك يقال اذا م د من نقطة و مستقيموازي ب ح فيكون موجودا في المستوى و عمودا على د (الحالة الاولى) واذن فيكون د و عمودا على ب ح (٢٠٩ نتيجة)

الحالة الثالثة - أن يكون المستقيم د و عمودا على مستقيمين ايا كانا في المستوى ويطلب البرهنة على أنه عمود على أى مستقيم من المستوى



فيكون عمودا عليه وبذلك يشاهد إمكان انزال من نقطة هـ العمود هـ و على المستوى م  
ثم اذا قيل بإمكان انزال عمود آخر منها هـ ب على المستوى المذکور كان المثلث الحادث هـ و ب  
فيه زاويتان قائمتان وهو محال أو أنه أمكن من نقطة هـ في مستوى هـ و ب انزال عمودي  
هـ و و هـ ب على المستقيم ب و وهو محال

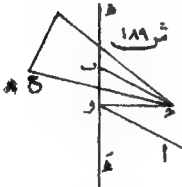
الحالة الثانية - أن تكون النقطة المفروضة كأنه على المستوى م وتكن و في رسم لذلك  
مستقيم ما أب في المستوى وينزل من نقطة و العمود و ب على هذا المستقيم ثم تصور تقرير  
مستويا بالمستقيم أب غير المستوى م وفي هذا المستوى يمكن إقامة العمود أه على أب  
ثم يقام من نقطة و في مستوى المستقيمين أو و أه العمود وهـ ب على المستقيم وا  
فيكون عمودا على المستوى م (والبرهنة على ذلك مثل المقدمة)

ثم اذا قيل بإمكان إقامة عمود آخر و د على المستوى م فان مستوى هذين العمودين يقطع  
المستوى م في المستقيم و د واذن فقد أمكن إقامة العمودين وهـ ب و د على و د  
في المستوى هـ و د وهو محال

### دعوى نظرية

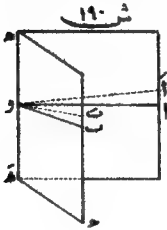
(٢١٢) كل نقطة مفروضة لا يمكن أن يمر بها الا مستوا واحد عمودي على مستقيم معلوم وهذه  
الدعوى على حالتين

الحالة الاولى (شكل ١٨٩) - أن تكون النقطة المفروضة خارج المستقيم المعلوم وتكن د  
فيتصور بالمستقيم هـ هـ ونقطة د مستويين هـ هـ من  
نقطة د العمود د و على هـ هـ ثم تصور أيضا تقرير مستوي  
آخر كيف اتفق بالمستقيم هـ هـ وفيه يقام من نقطة و العمود  
وا على هـ هـ فيكون مستوى المستقيمين د و و ا  
عمودا على هـ هـ (٢١٠)



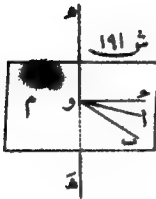
ثم اذا قيل بإمكان تقرير مستوا آخر من نقطة د عمودا على هـ هـ  
وقال به في نقطة ب كان المثلث الحادث د ب و فيه زاويتان  
قائمتان وهو محال وان قيل بإمكان تقرير مستوا آخر بالمستقيم د و عمودا على هـ هـ فان  
المستوى هـ هـ ا يقطع هذين المستويين في مستقيمين عمودين على هـ هـ وهو محال

الحالة الثانية (شكل ١٩٠) - أن تكون النقطة المفروضة و على المستقيم هـ هـ فبمرور لذلك بالمستقيم هـ هـ مستويان ويقام فيهما على العمودان و ا و ب فيكون مستوي هذين العمودين عمودا على هـ هـ



ثم اذا قيل بإمكان تقرير مستوي آخر عمودي على هـ هـ و ماربنقطة و فان أحدا المستويين هـ هـ ا و هـ هـ ب قطع المستويين العمودين على هـ هـ في مستقيمين ب و و ب و عمودين على هـ هـ وهو محال

نتيجة - المحل الجامع لجميع الاعمدة المقامة على المستقيم هـ هـ من نقطة و في الفراغ هو المستوى العمودي على هـ هـ المار بنقطة و (شكل ١٩١)



وذلك لان اثنين منها يتعين بهما موضع المستوى م العمودي على هـ هـ و المار بنقطة و ولما كان لا يمكن أن يمر بنقطة و الامستوي واحد عمودي على هـ هـ فتكون جميع الاعمدة موجودة في هذا المستوى

### دعوى نظرية

(٢١٣) اذا أنزل من نقطة خارج مستوي عمود عليه وأنزل من موقعه عمودا على مستقيم كائنه ووصلت نقطة تقاطعهما بأحدى نقط المستقيم العمودي على المستوى كان هذا المستقيم عمودا على المستقيم الكائنه في المستوى (وتسمى هذه النظرية بنظرية الاعمدة الثلاثة شكل ١٨٨)

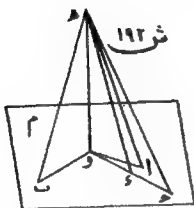
ليكن هـ هـ عمودا على المستوى م و و ا عمودا على ا ب فانه ينتج من الفروض أن ا ب عمودا على المستقيمين ا و و هـ هـ من المستوى هـ هـ ا (٢١٠ تنبيه) فيكون عمودا عليه واذن فيكون عمودا على ا هـ وهو المراد

### دعوى نظرية

(٢١٤) اذا أنزل من نقطة خارج مستوي مستقيم عمود عليه وجملة مواثيل فانه يحدث أولا - أن العمود أقصر من كل مواثيل



ثانيا - المائلان اللذان افتراعيين متساويين عن موقع العمود متساويان  
ثالثا - المائلان اللذان افتراعيان موقع العموديين مختلفين أبعدهما أطول

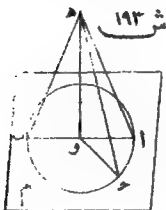


رابعا - عكس جميع ما تقدم صحيح (شكل ١٩٢)  
ليكن هو عمودا على المستوى م و هـ أ و هـ ب و هـ ج  
مواثل و أ = ب و

برهان الأول - حيث كان هو في المستوى هو أ  
عمودا على و أ كان هـ أ مائلا عليه ويكون هو > هـ أ  
برهان الثاني - حيث إن المثلثين هو أ و هـ ب  
فيهما زاوية قائمة محاطة بأضلاع متساوية فيهما النظر  
لنظيره فيكونان متساويين ويكون هـ أ = هـ ب

برهان الثالث - يؤخذ من و ج البعد و = و أ في المستوى هو ج المائل  
هـ ج < هـ د و حيث كان هـ د = هـ أ يكون هـ ج < هـ أ

برهان الرابع - يبرهن على عكس النظريات المتقدمة بواسطة ترجيع الامر الى الاستحالة  
فيقال مثلا انا كان هو أصغر من أي مستقيم مثل هـ أ بمدود من نقطة هـ الى المستوى م  
فيكون عمودا عليه لانه ان لم يكن كذلك لكان مائلا عليه وبذلك لا يكون أصغرا لابعاد المحصورة  
بين نقطة هـ والمستوى وهو خلاف وهكذا



تنبيه - العمود النازل من أي نقطة على مستوي يسمى بعد  
النقطة عن المستوى

نتيجة - المحل الجامع لمواقع المواثل المتساوية الممدودة  
من نقطة فراغية الى مستو هو محيط دائرة مركزه موقع  
العمود على المستوى المذكور (شكل ١٩٣) لانه حيث  
كانت جميع هذه المواثل متساوية فتكون ابعادها عن  
موقع العمود كذلك (الرابع)

### ذهوى نظرية

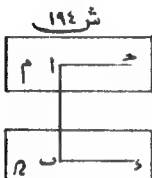
(٢١٥) المستوى العمودي على أحد مستقيمين متوازيين يكون عمودا على الثاني وللبهنة على  
ذلك يقال من المعلوم أن المستقيمين المتوازيين يصنعان زاويتين متساويتين مع أي مستقيمين

متوازيين محدودين من نقطتي تقابلهما بالمستوى (٢٠٨) فإذا كان أحدهما عمودا على جميع مستقيمتان المستوى فيكون الثاني كذلك أعني يكون عمودا على المستوى

نتيجة - عكس هذه النظرية صحيح أعني أن المستقيمين العمودين على مستوى يكونان متوازيين لأنه ان لم يكونا كذلك لتلاقيان في نقطة واذن فقد أمكن منها انزال عمودين على المستوى وهو محال

## دعوى نظرية

(٢١٦) المستقيم العمودى على أحد مستويين متوازيين يكون عمودا على الثاني (شكل ١٩٤) ليكون  $m$  و  $n$  المستويين المتوازيين و  $ab$  المستقيم المعلوم العمودى على المستوى  $m$  ولبرهنة على ذلك يقال



أولا - المستقيم  $ab$  لابد أن يقابل المستوى  $n$  الثاني (٢٠٨) نتيجة ٣

ثانيا - يمرر بالمستقيم  $ab$  مستويًا يقطع المستويين المتوازيين في المستقيمين المتوازيين  $ac$  و  $bd$  وحيث كان  $ab$  عمودا على أحدهما فيكون عمودا على الثاني

$n$  وبإعادة هذا العمل بواسطة تمرير مستويان وثالث وهكذا بالمستقيم  $ab$  فانما اثبت النظرية

نتيجة - عكس هذه النظرية صحيح أعني أن المستويين العمودين على مستقيم متوازيان لأنه ان لم يكونا كذلك لتقاطعا في مستقيم وحينئذ فقد أمكن من إحدى نقط خط التقاطع تمرير مستويين عمودين على مستقيم وهو محال

## الفصل الرابع

(في مسقط النقطة والمستقيم)

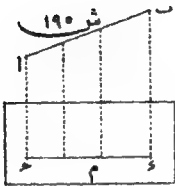
## تعريفات

(٢١٧) مسقط أى نقطة على مستواه هو موقع العمود النازل من هذه النقطة على هذا المستوى

(٢١٨) ومسقط مستقيم على مستواه هو محل الجامع لمقاطع نقط المستقيم على المستوى

## دعوى نظرية

(٢١٩) مسقط المستقيم على المستوى هو خط مستقيم (شكل ١٩٥)

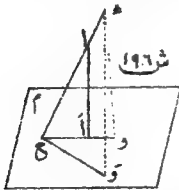


لتكن  $\alpha$  مسقط نقطة  $A$  على المستوى  $\pi$  فتمرر بالمستقيمين  $AB$  و  $AC$  مستويا يقطع المستوى  $\pi$  في المستقيم  $\alpha$  فإذا أريد الآن إسقاط نقطة  $B$  فاننا نزل منها العمود  $BD$  على المستوى فيكون موازيا  $\alpha$  (٢١٥ نتيجة) وبناء عليه يكون موجودا بقامه في المستوى  $AB$  (٢٠٣) ويكون موقعه  $\alpha$  موجودا على المستقيم  $\alpha$

وحينئذ يكون المحل الجامع لاسقاط جميع نقاط المستقيم  $AB$  هو مستقيم آخر  $\alpha'$   
نتيجة - يكفي لإيجاد مسقط مستقيم على مستو أن يجمع بين مسقطي نقطتين من نقطه بمستقيم

## دعوى نظرية

(٢٢٠) الزاوية الحادة الحادثة من أى مستقيم ومسقطه على مستوي أصغر جميع الزوايا الحادة الحادثة من المستقيم المذ كور وأى مستقيم مضمن موقعه في المستوى (شكل ١٩٦)



ليكن  $\alpha$  المستقيم المعلوم و  $\alpha'$  مسقطه على المستوى  $\pi$  و  $\alpha''$  مستقيما آخر محدودا في المستوى من الموقع  $\alpha$

فإذا أخذ  $\alpha' = \alpha''$  و وصل  $\alpha'$  فالثلثان  $\alpha'$  و  $\alpha''$  و  $\alpha'$  فيهما  $\alpha'$  مشترك بينهما والضلع  $\alpha' = \alpha''$  و لكنه حيث كان الضلع هو أصغر من  $\alpha'$  تكون زاوية  $\alpha'$  و  $\alpha''$  أصغر من زاوية  $\alpha'$  و هو المطلوب

نتيجه - الزاوية الحادة  $\alpha'$  و الحادثة من المستقيم  $\alpha$  و مسقطه  $\alpha'$  على المستوى تسمى ميل المستقيم على المستوى أو بزاوية المستقيم والمستوي

نتيجة - الزاوية المنفرجة التي يصنعها المستقيم مع امتداد مسقطه هي بناء على ما تقدم أكبر جميع الزوايا التي يمكن حدوثها بين المستقيم المذ كور وأى مستقيم مضمن موقعه في المستوى

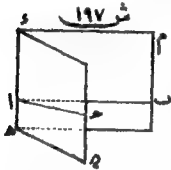
## الفصل الخامس

### (في الزوايا الزوجية)

#### تعريف

(٢٢١) الزاوية الزوجية هي الشكل المتكون من مستويين متقاطعين يسميان وجهها الزاوية وخط تقاطعهما يسمى حرف الزاوية

وتقرأ الزاوية الزوجية بالحرفين الهجائيين المسمى بهما نقطتان من حرفها إذا كانت منفردة مثل زاوية د ه (شكل ١٩٧) وأما إذا اشتركت في الحرف د ه مع زوايا أخرى فقرأ بالاحرف الاربعة م د ه ز بشرط أن يكون الحرفان المسمى بهما حرفها



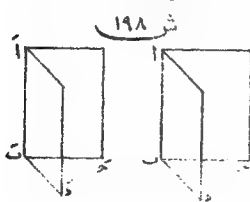
في الوسط

(٢٢٢) أنا أخذت نقطة مثل أ على حرف الزاوية وأقيم منها العمودان أ ب و أ ح على د ه كل واحد منهما في وجه من وجهي الزاوية فإن مقدار الزاوية ب أ ح الواقعة بين هذين العمودين ثابت دائماً مهما كان وضع نقطة أ على الحرف

ولهذا نسمى هذا الزاوية بزاوية العمودين أو بالزاوية المستوية للزاوية الزوجية وهي التي يقدر بهما ميل أحد المستويين على الآخر

(٢٢٣) الزاويتان الزوجيتان المتساويتان هما اللتان ينطبق أوجههما على بعضهما ما بمجرد انطباق حرفيهما

تنبيه - إذا طبقنا الزاوية الزوجية أ ب (شكل ١٩٨) على مساويتها أ ب وقعت نقطة ب على نقطة ب فإن زاوية العمودين ب د ز للزوجية أ ب تنطبق ضرورة

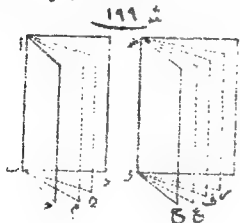


على زاوية العمودين ب د ز للزوجية أ ب وأما إذا كانت زاوية العمودين ب د ز مساوية لنظيرتها ب د ز ووضعنا أحدهما على الأخرى فإن الحرف أ ب ينطبق ضرورة على الحرف أ ب وبذلك ينطبق وجهها الزاوية الأولى على وجهي الزاوية الثانية ويساويان وبناء على ذلك يقال

أولاً - يتساوى الزاويتان الزوجيتان إذا تساوى زاويتاهما المستويتان  
ثانياً - يتساوى الزاويتان المستويتان إذا تساوى زاويتاهما الزوجيتان

### دعوى نظرية

(٢٢٤) النسبة بين الزاويتين الزوجيتين هي على أي حال كانت كالنسبة بين زاويتيها المستويتين (شكل ١٩٩)



لنفرض أولاً أن بين الزوجيتين مقياساً مشتركاً  
أي زاوية زوجية منحصرة فيهما مارة صحيحة بأن  
انحصرت ثلاث مرات في أحدهما وأربعة في  
الثانية فتكون النسبة بين الزوجيتين كالنسبة بين  
هذين العددين الصحيحين أعني يكون

$$\frac{3}{4} = \frac{ا ب ج}{هـ و ط}$$

فإذا مررنا بكل واحدة من النقطتين ب و و مستويًا عمودياً على الحرف المقابل لها فإن هذين  
المستويين يقطعان جميع الأوجه في مستقيمتين عمودية على الحرفين ا ب و هـ وبذلك  
تكون الزوايا ح ب م و م ب د و د ب ز و ز ب ح و ح ب د و د ب ح و هـ و هـ د و د هـ ح و ح هـ د  
المقابلة للزاويا الزوجية الصغيرة وحيث كانت متساوية تكون المستوية كذلك (٢٢٣ تنبيه)  
ويشاهد انقسام زاوية ح ب د الى ثلاث زوايا متساوية وزاوية ح و ط الى أربع زوايا  
متساوية فتكون النسبة بين الزاويتين ح ب د و ح و ط كالنسبة بين العددين الصحيحين  
٣ و ٤ ويحدث

$$\frac{3}{4} = \frac{ا ب ج}{هـ و ط}$$

وبمقارنة هذا التناسب بالسابق ينتج

$$\frac{ا ب ج}{هـ و ط} = \frac{ا ب ج}{هـ و ط}$$

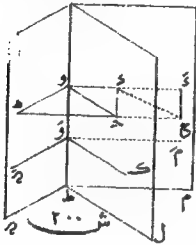
وأما إذا لم يوجد بين الزاويتين الزوجيتين مقياس مشترك فانه يبرهن على هذه النظرية بعين  
الطريقة التي أتت بفترة (٨٠ جزء أول)

نتيجة - ينتج مما ذكر أن الزاوية المستوية أو زاوية العمودين يمكن اعتبارها مقياساً للزاوية  
الزوجية لان المقدار الذي ينتج بمقاس الزوجية هو عين الذي ينتج بمقاس المستوية عند مقارنته

كل منهما بالوحدة التي من نوعها بشرط أن تكون وحدة الزوايا المستوية هي زاوية العمودين  
لوحدت الزوايا الزوجية

### دعوى نظرية

(٢٢٥) كل نقطة من نقط المستوى المنصف لزاوية زوجية على بعدين متساويين من وجهيها  
وبالعكس كل نقطة توجد على بعدين متساويين من وجهي زاوية زوجية تكون إحدى نقط  
المستوى المنصف لها شكل (٢٠٠)



من المعلوم أن المستوى المنصف لزاوية زوجية هو  
مستو مار بجر فها وقاسمها إلى زاويتين زوجيتين  
متساويتين

أولاً - إذا فرضت نقطة ح على المستوى ال  
المنصف لزاوية الزوجية م أ ط و كان  
بعدها عن وجهيها أم و آ هـ ح د و ح هـ  
يقال

حيث كان ح د عموداً على المستوى م فيكون عموداً على المستقيم أ و (٢١٠) وكذا حيث  
كان ح هـ عموداً على المستوى د فيكون عموداً أيضاً على أ و حينئذ يكون هذا المستقيم  
أ و عموداً على المستوى ح د و هـ (٢١٠) وتكون إذن زاوية د و ح م قياس الزاوية  
الزوجية م أ و ل و زاوية ح و هـ م قياس الزاوية الزوجية ل أ و وحيث أن الزاويتين  
الزوجيتين متساويتان فرضاً تكون المستويتان كذلك ويكون المثلثان القائم الزاوية ح و د  
و ح و هـ متساويين لتساوي فيهما وتر وزاوية من أحدهما نظيرهما من الثاني وينتج من  
تساويهما أن ح د = ح هـ

ثانياً - إذا كان البعدان ح د و ح هـ متساويين فإنه يمر المستوى ح أ و فيكون المستقيم  
ح أ منصفاً لزاوية هـ و د وحيث أن الزاويتين المستويتين ح و د و ح و هـ  
متساويتان يكون الزوجيتان كذلك وبذلك يكون المستوى أ ل منصفاً للزاوية الزوجية  
نتيجة - كل نقطة مثل ع مأخوذة خارج المستوى المنصف هي على بعدين مختلفين من وجهي  
الزاوية الزوجية لأنه لو كان الأمر بخلاف ذلك لوجدت ضرورة على المستوى المنصف وهو بخلاف  
الفرض

المستوى المنصف لزاوية زوجية هو المحل الهندسي للنقط المتساوية البعد عن وجهيها

## الفصل السادس

### (في المستويات المتعامدة)

#### تعريف

(٢٢٦) المستوى العمودي على آخره هو ما يصنع معه زاويتين زوجيتين متجاورتين متساويتين يقال لكل واحد منهما قائمة

#### دعوى نظرية

(٢٢٧) كل مستقيم كائناً في مستوا لا يمكن أن يمر به المستوي واحد عمودي على الأول يبرهن على هذه النظرية بمثل ما سبق البرهنة به على نظيرتها في الباب الأول من الجزء الأول نتيجة - يمكن أن يستعان بهذه النظرية على إثبات النظريات الآتية الأولى - إذا لاقى مستويان مستويان آخر فانه يصنع معه زاويتين زوجيتين متجاورتين مجموعهما يساوي زاويتين زوجيتين قائمتين الثانية - إذا كان مجموع الزوجيتين المتجاورتين مساوياً قائمتين يكون وجهاهما المتطرفان في استواء واحد

الثالثة - إذا تقاطع مستويان فكل زاويتين زوجيتين متقابلتين بالحرف متساويتان الرابعة - المستويان المنصفان لزاويتين زوجيتين متجاورتين متعامدان

#### دعوى نظرية

(٢٢٨) الزاوية الزوجية القائمة تكون زاويتها المستوية كذلك وبالعكس أولاً - إذا كان المستوى م عموداً على المستوى ن وقطعناهما بمستوي عمودي على خط تقاطعهما فانه يحدد عليهما زاويتين مستويتين وتكونان متجاورتين وحيث كان الزوجيتان متساويتين تكون المستويتان كذلك وإذا ن تكون كل واحد منهما قائمة ثانياً - إذا كانت الزاويتان المستويتان قائمتين وحادثتين من مدم مستوي عمودي على خط تقاطع مستويين فانه يجب أن تكون الزوجيتان متساويتين وإذا ن تكون كل واحد منهما قائمة تنبيه - يكفي في البرهنة على تعامد مستويين أن يبرهن على أن الزاوية المستوية للزاوية الزوجية الحادثة بينهما تكون قائمة

## دعوى نظرية

(٢٢٩) كل مستوي يمر بمستقيم عمودي على مستوا آخر يكون عمودا على هذا المستوى الاخير  
كافى (شكل ٢٠١)

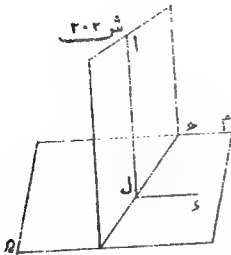


ليكن ب و عمودا على المستوى ح د والمستوى م و  
مارا بالمستقيم ب و فاذا كان و د عمودا على خط  
تقاطع المستويين ا د تكون زاوية ب و د قائمة  
لان ب و عمودا على المستوى ح د وحيث انها هي  
الزاوية المستوية المتسوية للزاوية الزوجية الواقعة بين  
المستويين فيكونان متعامدين وهو المراد (٢٢٨)

نتيجة - كل مستوي يوازي المستقيم ب و يكون عمودا على المستوى ح د لانه اذا اخذت  
فيه نقطة و مد منها مستقيم يوازي ب و فيكون موجودا بقبله فيه (٢٠٥ نتيجة ٤) ويكون  
أيضا عمودا عليه (٢١٥)

## دعوى نظرية

(٢٣٠) وبالعكس اذا تعامد مستويان فكل مستقيم مد في أحدهما عموديا على خط تقاطعهما  
يكون عمودا على الثاني (شكل ٢٠٢)



ليكن المستويان م و ا متعامدين ومد المستقيم  
ال في المستوى ا عموديا على ح د فيد ل و  
عمودا على ح د في المستوى م فتكون زاوية  
ال د هي الزاوية المستوية للزاوية الزوجية  
ا ب ح د وحيث كانت الزاوية الزوجية قائمة  
تكون المستوية كذلك ويكون ال عمودا على  
ل د وحيث كان عمودا على ح د فيكون اذن  
عمودا على المستوى م د

نتيجة ١ - اذا تعامد مستويان وأخذت نقطة على أحدهما وأرسل منها عمودا على الثاني كان هذا  
العمود موجودا بقبله في المستوى الاول

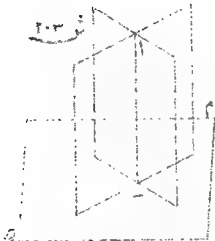


لانه ان لم يكن كذلك وأنزل من النقطة المذكورة عمود على خط تقاطع المستويين فيكون عمودا على المستوى الثاني كما تقدم ذكره وحيث انه لا يمكن من النطقة المذكورة الا انزال عمود واحد على المستوى فالعمودان يتحدان اذن وبصيران واحد وهو المطلوب

نتيجة ٢ - اذ تعامد مستويان فكل مستقيم مثل  $a$  عمود على أحدهما  $m$  مثلا يكون موازيا للثاني وللبرهنة على ذلك تؤخذ نقطة في المستوى  $n$  وينزل منها عمود على المستوى  $m$  فيكون موجودا بتمامه في المستوى  $n$  (نتيجة ١) ويكون أيضا موازيا للمستقيم  $a$  وحيث ان المستقيم  $a$  مواز لمستقيم  $n$  في المستوى  $n$  فيكون موازيا له (٢٠٥ نتيجة ٥) وهو المراد

### دعوى نظرية

(٢٣١) المستويان العموديان على مستوي ثالث يكون خط تقاطعهما عموديا على المستوى الاخير (شكل ٢٠٣) اذا كان  $ab$  خط تقاطع مستويين عموديين على المستوى  $m$  فانا نأخذ نقطة  $a$  مثلا من خط التقاطع ونزل منها عمودا على المستوى  $m$  فيكون موجودا بتمامه في كلا المستويين (٢٣٠ نتيجة ١) واذن فيكون هو خط تقاطعهما



نتيجة - ويمكن التعبير عن منطوق هذه النظرية بطريقة أخرى فيقال المستوى العمودي على مستويين متقاطعين يكون عموديا على خط تقاطعهما

### دعوى نظرية

(٢٣٢) باي مستقيم لا يمكن أن يمر الامستو واحد فقط عمودي على آخر معلوم

أولا - تؤخذ نقطة على المستقيم المعلوم وينزل منها عمود على المستوى ثم يمر مستويين  $m$  المستقيمين فيكون عمودا على المستوى المعلوم لاشتماله على مستقيم عمودي عليه (٢٢٩)

ثانيا - من المعلوم ان كل مستو يمر بالمستقيم المعلوم ويكون عمودا على المستوى المفروض لا بد أن يحتوى على العمود المنزل من احدى نقط المستقيم على المستوى المذكور وحيث انه لا يمكن أن يمر بالمستقيمين المذكورين الامستو واحد فقد ثبت المطلوب

تنبيه - ما ذكرناه من البراهين يقتضى أن لا يتجدد المستقيم المعلوم بالعمود المنزل من إحدى نقطه على المستوى أعنى أن لا يكون المستقيم المفروض عمودا على المستوى المعلوم

نتيجة - وينتج من ذلك أن المستوى المسقط للمستقيم يكون عمودا على مستوى المسقط

## دعوى نظرية

(٢٢٣) كل مستقيمين غير موجودين في مستوا واحد يمكن دائما أن يدلها أولاهما عمود مشترك

بينهما وثانيا أنه لا يمكن مد غيره وثالثا أن يكون هذا

العمود أصغر الأبعاد المحصورة بينهما (شكل ٢٠٤)

ليكونا  $ا د$  و  $ب ه$  المستقيمين المعلومين الغير

الوجودين في مستوا واحد فتؤخذ نقطة  $ه$  على أحدهما

ويتم منها المستقيم  $ه و$  موازيا للثاني ثم يمرر بالمستقيمين

$ه و$  و  $ب ه$  مستوي فيكون موازيا للمستقيم  $ا د$

(نتيجة ٢٠٥)

فإذا كان المستقيمان المفروضان في مستوا واحد كان هذا

المستوى مشتركا على  $ا د$  ضرورة ثم ينزل من نقطة  $د$  إحدى نقط المستقيم  $ا د$  العمود  $د ح$

على المستوى  $م$  ويمتد من موقعه  $ح$  المستقيم  $ح ب$  موازيا  $ا د$  فيكون موجودا بتملحه

في المستوى  $م$  (نتيجة ٢٠٥) ويقابل  $ب ه$  لأنه ان لم يقابله كان موازيا له ويترتب

على ذلك موازاة المستقيمين  $ب ه$  و  $ا د$  وهو مخالف للفرض ثم يمد من نقطة التقابل  $ب$

المستقيم  $ب ا$  موازيا للمستقيم  $د ح$  اذا تقرر هذا يقال

أولا - ان المستقيم  $ا ب$  عمود مشترك بين المستقيمين المذكورين لأنه حيث كان المستقيم

المذكور موازيا  $د ح$  العمودى على المستوى  $م$  فيكون عمودا عليه أيضا وبناء عليه يكون

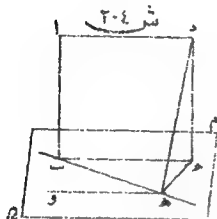
عمودا على المستقيمين  $ب ه$  و  $ب ا$  أو  $ا د$  الموازى  $ب ح$

ثانيا - أنه لا يمكن تمديد خلاف هذا العمود المشترك بينهما لأنه لو قيل ان  $د ه$  عمود آخر مشترك

بينهما فيكون ضرورة عمودا على  $ب ه$  و  $ب ا$  الموازى  $ا د$  واذن يكون عمودا على المستوى

$م$  لكنه حيث كان  $د ح$  عمودا على المستوى  $م$  فقد أمكن انزال من نقطة  $ه$  عمودين

على المستوى  $م$  وهو محال (٢١١)



فلما ... ان هذا العمود المشترك هو أصغر الابعاد المحصورة بين المستقيمين المقروطين وذلك لان كل مستقيم محصور بينهما غيره مثل  $د ه$  أطول من العمود  $د ح$  المنزل من نقطة  $د$  على المستوى  $م ح$  وحيث كان  $د ح = ا ب$  يكون  $د ه < ا ب$

## الفصل السابع

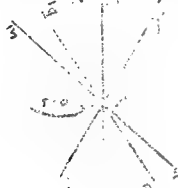
( في الزوايا المجسمة )

### تعاريف

(٢٣٤) الزاوية المجسمة هي الشكل المتكون من جبهة مستويات متقاطعة متني ومجموعة في نقطة واحدة وتقاطعات المستويات يحدث عنها ما يسمى بأحرف المجسمة ونقطة اجتماعها هي رأسها والزوايا المستوية المتكونة بين الاحرف تسمى أوجه المجسمة

(٢٣٥) متى كان عدداً لأوجه الزاوية المجسمة ثلاثة وهو أقل ما يمكن يقال لها زاوية مجسمة ثلاثية ولم نعتبر من الزوايا المجسمة الا المهدب منها أى الموضوع في جهة واحدة من امتداد أحد الأوجه

(٢٣٦) اذا فرضت الزاوية المجسمة الرباعية مثلاً  $س ا ب د$  (شكل ٢٠٥)



ومدت الاحرف  $س ا$  و  $س ب$  و  $س د$  و  $س ح$  و  $س و$  من جهة الرأس  $س$  فانه يتشكل من ذلك زاوية مجسمة رباعية أخرى  $س ا ب ح د$  يقال لها مماثلة للاولى أعني ان زوايا المجسمة الجليدية زوجية كانت أو مستوية هي عين زوايا المجسمة الاولى لكنه لا يمكن انطباق احدهما على الاخرى لانه لو طبق الوجه  $د س ا$  على مساويه  $د س ا$  بحيث تكون أحرف المجسمتين في جهة واحدة من

الوجه المشترك يشاهد ان الزوايا المستوية والزوجية من المجسمتين موضوعة على ترتيب معكوس

### قائـدة

(٢٣٧) انا أقوم من نقطة و المأخوذة على حرف الزاوية الزوجية  $ا ب$  العمود  $و ح$  على الوجه  $ا ح$  بحيث يكون هو والوجه  $ا د$  في جهة واحدة بالنسبة للوجه  $ا ح$  ثم أقوم منها العمود  $و ط$  على الوجه  $ا د$  بحيث يكون هو والوجه  $ا ح$  في جهة واحدة بالنسبة للوجه  $ا د$  فان



مكاملة للزاوية المستوية بمقاس الزوجية  $س ح$  وان زاوية  $ب س ح$  مكاملة للزاوية المستوية مقاس الزوجية  $س ا$

ثانيا - حيث كان  $س ا$  عمودا على الوجه  $ب س ح$  فيكون عمودا على  $س ح$  وكذا حيث كان  $س ب$  عمودا على الوجه  $ا س ح$  فيكون عمودا على  $س ح$  وبناء عليه يكون  $س ح$  عمودا على المستوى  $ا س ب$  وغير ذلك حيث كان  $س ح$  عمودا على الوجه  $ا س ب$  وكان هو الحرف  $س ح$  في جهة واحدة بالنسبة للوجه  $ا س ب$  فتكون زاوية  $ح س ح$  حادة وحيث قد ثبت ان  $س ح$  عمود على المستوى  $ا س ب$  ومكون مع  $س ح$  زاوية حادة فيكون حينئذ هو الحرف  $س ح$  في جهة واحدة بالنسبة للوجه  $ا س ب$

وبمثل ذلك يشاهد ان  $س ب$  عمود على المستوى  $ا س ح$  وانه الحرف  $س ب$  في جهة واحدة بالنسبة لهذا المستوى وان  $س ا$  عمود على المستوى  $ح س ب$  وانه هو الحرف  $س ا$  في جهة واحدة بالنسبة لهذا المستوى وحينئذ فيمكن اعتبار الزاوية  $س ا ب$  كأنها أنشئت من الزاوية  $س ا ب$  بالطريقة التي أنشئت بها الزاوية  $س ا ب$  من الزاوية  $س ا ب$  واذن فتكون زواياها المستوية مكاملة للزوايا المستوية التي تقاس بها الزوايا الزوجية من المجسمة  $س ا ب ح$

### دعوى نظرية

(٢٣٩) اذا تساوى وجهان من زاوية مجسمة ثلاثية تساوى الزاويتان الزوجيتان المقابلتان لهما وبالعكس (شكل ٢٠٨)



أولا - ليكن الوجه  $ب س ا =$  الوجه  $ح س ا$

ونطلب البرهنة على أن الزاوية الزوجية  $س ح$

تساوى الزاوية الزوجية  $س ب$

وللوصول الى ذلك نضع بجانب المجسمة المفروضة

مماثلتها  $س ا ب$  ثم نطبق الثانية على الاولى

بأن نضع الزاوية  $س ا$  على مساويتها  $س ا$

وحيث ان الوجه  $ا س ح$  مساو للوجه  $ا س ب$  فيكون مساويا للوجه  $ا س ب$  واذن

فيطبق الحرف  $س ح$  على  $س ب$  وبمثل ما ذكر ينطبق الحرف  $س ب$  على الحرف

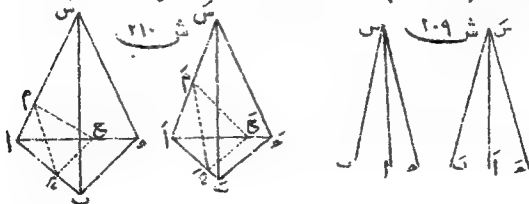
$س ح$  وبذلك ينطبق المجسمتان على بعضهما وتكون الزاوية الزوجية  $س ب$  مساوية للزاوية

الزوجية  $س ح$  واذن تكون الزوجية  $س ب$  مساوية للزوجية  $س ح$  وهو المراد

ثانيا - لتكن الزوجية  $س ب$  مساوية للزوجية  $س ح$  وتطلب البرهنة على أن الوجه  $س ا$  مساو للوجه  $س ا$  والوصول الى ذلك نضع بجانب المجسمات الثلاثية المفروضة مماثلتها  $س ا ب$  ثم نطبق الثانية على الاولى بان نضع الوجه  $س ب$  على مساويه  $س ب$  ومن حيث ان الزوجية  $س ب$  مساوية للزوجية  $س ب$  وكانت هذه الاخيرة مساوية للزوجية  $س ح$  فرضا فتكون الزوجية  $س ب$  مساوية للزوجية  $س ح$  وان فنأخذ الوجه  $س ا$  اتجاه الوجه  $س ا$  ونمثل ما ذكر ياخذ الوجه  $س ا$  اتجاه الوجه  $ب س ا$  وبذلك ينطبق الحرف  $س ا$  على الحرف  $س ا$  وينطبق المجسمتان على بعضهما ويكون الوجه  $س ا$  المساوي للوجه  $س ا$  مساويا للوجه  $س ا$  أعني أن الوجه  $ب س ا$  مساو للوجه  $س ا$  وهو المطلوب

### دعوى نظرية

(٢٤٠) يتساوى المجسمتان الثلاثيتان اذا وجد فيهما واحد من الامور الآتية  
أولا - اذا ساوى من احدهما زاوية زوجية والوجهان المحيطان بها لتظايرهما من الثانية  
ثانيا - اذا ساوى من احدهما وجهه والوجهين المجاوران له لتظايرهما من الثانية  
ثالثا - اذا تساوت فيهما الالوجه الثلاثة كل لتظايرها  
رابعا - اذا تساوت فيهما الزوايا الزوجية الثلاثة كل لتظايرها  
برهان الاول - (شكل ٢٠٩) تطبق احدى المجسمتين على الاخرى بالطريقة التي أجريت  
(بمثلة ٢٣٩) أولا  
برهان الثاني - (شكل ٢٠٩) تطبق احدى المجسمتين على الاخرى بالطريقة التي أجريت  
(بمثلة ٢٣٩) ثانيا  
برهان الثالث - (شكل ٢١٠) تؤخذ الحرف الستة من المجسمتين متساوية ثم نصل



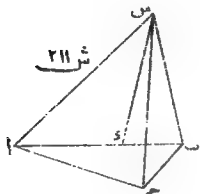
المستقيمت  $ا ح$  و  $ا ب$  و  $ب ح$  و  $أ ح$  و  $أ ب$  و  $ب ح$  فالثلثات المتساوية السابقين  
الحدائق في الجسمة الاولى وهى  $ا س ب$  و  $ا م س$  و  $ب س ح$  تكون مساوية لتناظرها  
من الثانية كالايجنى واذن يكون المثلثان  $ا ب ح$  و  $أ ب ح$  متساويين لتساوى أضلاعهما  
الثلاثة المتناظرة اذا تقر هذا ومرة بالبنية الاختيارية  $م$  من الحرف  $س ا$  مستويا عموديا  
على الحرف المذكور فانه يقطع الوجهين  $ا م س$  و  $ا س ب$  في المستقيمين  $م ع$  و  $م ح$   
وتكون الزاوية  $ع م ح$  مقاسا للزوجية  $س ا$  وغير ذلك فان المستقيم  $م ع$  لا بد أن يقابل  
المستقيم  $ا ح$  لانه اذا وازاه تكون زاوية  $س ا ح$  قائمة وهذا ممنوع هنا لان المثلث  $س ا ح$   
متساوى السابقين وبعين هذا السبب يقابل المستقيم  $م ح$  المستقيم  $ا ب$  ثم يوصل  $ع ح$   
ويؤخذ بعد ذلك البعد  $ا م = ا م$  ويجرى في نقطة  $م$  عين ما جرى في نقطة  $م$  فتكون  
زاوية  $ع م ح$  مقاس الزوجية  $أ م$  ويوصل  $ع ح$

فالثلثان  $ع م ا$  و  $ع م أ$  متساويان لتساوى ضلع ومجاوراه من الزوايا من احدهما لتناظرها  
من الثاني وينتج من تساويهما أن  $ا ح = ا ع$  و  $ع م = ع م$  وبمثل ذلك يبرهن على أن  
 $ا د = ا ح$  و  $م د = م ح$  أما المثلثان  $ا ع د$  و  $ا ح د$  ففي أحدهما ضلعان  
والزاوية المحصورة بينهما مساوية لتناظرها من الثاني فيكونان متساويين وينتج من تساويهما  
أن  $ع د = ح د$  واذن فالثلثان  $ع م د$  و  $ح م د$  متساويان لتساوى الاضلاع  
الثلاثة المتناظرة فيهما وحينئذ تكون زاوية  $ع م د = ح م د$  أعنى أن الزوجية  $س ا$   
تساوى الزوجية  $س أ$  وبذلك فقد رجع الامر الى الحالة الاولى

برهان الرابع - يقال لتكونا  $س$  و  $س$  الجسمتين الثلاثيتين المعلوماتين  $ط$  و  $ط$   
مكلفتين من حيث ان الزوايا الزوجية من الجسمتين المعلوماتين  $س$  و  $س$  متساويتان تكون  
الزوايا المستوية من مكلفتين  $ط$  و  $ط$  أو أوجههما المتناظرة متساوية (٢٣٨) غير أن  
تساوى الالوجه المتناظرة من الجسمتين  $ط$  و  $ط$  يقتضى تساوى الزوايا الزوجية المتناظرة فيهما  
(الثالث) وهذا يستلزم تساوى الالوجه المتناظرة من الجسمتين الاصيلتين  $س$  و  $س$  وهو المراد  
تنبيه ١ - النظريات الثلاثة الاولى من هذه الدعوى لها تناظر في تساوى المثلثات دون  
النظرية الرابعة حيث قد علم أن تساوى زوايا مثلثين لا يستلزم تساويهما بل يقتضى تشابههما فقط  
تنبيه ٢ - اذا لم تكن الاجزاء المتساوية في الجسمتين الثلاثيتين المعلوماتين موضوعة على  
ترتيب واحد فلا تكون تلك الجسمات متساوية بل تكون متماثلة كما ذكر سابقا وفي مثل ذلك  
يجرى البراهين على احدى الجسمتين ومماثلتها

## دعوى نظرية

(٢٤١) أى وجه أو زاوية مستوية من زاوية مجسمة ثلاثية أصغر من مجموع الوجهين الآخرين (شكل ٢١١)



ليكن  $ا ب ج$  الوجه الاكبر من المجسمة الثلاثية  $س$  وتطلب البرهنة على أنه أصغر من  $ا س د + ج س د$  وذلك تؤخذ الزاوية  $ب س د$  من الزاوية الكبرى  $ب س ا$  مساوية لزاوية  $ب س ج$  ثم يمد المستقيم الاختياري  $ب د$  أو يؤخذ  $س د = س د$  ويوصل  $ب د$  ،  $ا د$  فالثلثان  $ب س د$  و  $ب س ج$  متساويان

لتساوي من أحدهما ضلعان والزاوية المحصورة بينهما لتطابقهما من الثانى وينتج من تساويهما أن  $ب د = س د$

لكن المثلث  $ب د ا$  فيه  $ب ا$  أو  $ب د + ا د > ب ا + ا د$  أو  $ا د > ا د$

ثم اذا قرن المثلثان  $ا س د$  و  $ا س د$  يعضهما نجد أن الضلعين  $ا س$  و  $س د$  من أحدهما مساويان لتطابقهما من الثانى غير أنهما كان الضلع الثالث من الاول وهو  $ا د$  أكبر من نظيره  $ا د$  تكون زاوية  $ا س د$  أكبر من زاوية  $ا س د$  وهو المراد

## دعوى نظرية

(٢٤٢) الزاوية الزوجية الكبرى من أى زاوية مجسمة ثلاثية يقابلها الوجه الاكبر منها وبالعكس (شكل ٢١٢)



أولاً - لتكن الزاوية الزوجية  $س د$  من المجسمة الثلاثية  $س ا ب ج$  وتطلب البرهنة على أن الوجه  $ا س ب$  أكبر من الوجه  $ب س د$  وللوصول الى ذلك يمرر بالحرف  $س د$  مستوي يصنع مع الوجه  $س ا ب$  الزاوية الزوجية  $س د ا$  مساوية للزوجية  $س ا ب$  وهذا المستوى يقابل الوجه  $ا س ب$

فى المستقيم  $س د$  وبذلك يكون فى المجسمة الثلاثية الحادثة  $س ا د$  زاويتان زوجيتان متساويتان  $س ا د$  و  $س د ا$  فيكون الوجهان المقابلان لهما  $س د$  و  $س ا$  متساويين

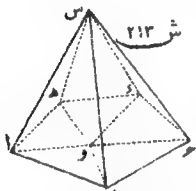


(٢٣٩ ثانيا) لكن المجسمة الثلاثية  $س د ح$  فيها الوجه  $س د > س ح > د ح$  يجب أن تكون الزوجية  $س د$  أو  $س ح > س د > د ح$  وهو المطلوب

ثانيا - اذا كان الوجه  $اس ب$  أكبر من الوجه  $س د ح$  يجب أن تكون الزوجية  $س د$  أكبر من الزوجية  $س ا$  لانه ان لم يكن كذلك وكانت تساويها أو أصغر منها لزم أن يكون الوجه  $اس ب$  اماما ساويا للوجه  $س د ح$  (٢٣٩ ثانيا) أو أصغر منه (أولا) وكلاهما مخالف للفرض

### دعوى نظرية

(٢٤٢) مجموع الزوايا المستوية لأي زاوية مجسمة (ثلاثية كانت أو كثيرة الاوجه) أصغر من أربع قوائم (شكل ٢١٣)



لذلك تقطع جميع أوجه المجسمة بمستويات تشكل من خطوط تقاطعاتها معها شكل كثيرا الاضلاع  $ا ب د ه$  فاذا فرضت نقطة و داخله و وصل منها إلى رؤسها بمستقيمات فانه يتكون حولها مثلثات متحدة في العدد مع المثلثات المجمعة في نقطة  $س$  غير أن بعض زوايا مثلثات الجمله الاولى المرموز له بالحرف و مجتمع حول نقطة و وبعضها الآخر المرموز له بالحرف ا يتركب منه وجه واحد لكل واحدة من الزوايا المجسمة الثلاثية  $ا ب د ه$  وكذلك بعض زوايا الجمله الثانية المرموز له بالحرف س مجتمع حول نقطة س وبعضها الآخر ب مكل لباقي أوجه المجسمات  $ا ب د ه$  و  $س د ه$  ولما كان مجموع الزوايا القائمة المشغل عليه كل واحد من الجملتين واحدا يحدث  $و + ا = س + ب$

وحيث ان المجموع ا أصغر من المجموع ب (٢٤١) يجب أن يكون المجموع و أكبر من المجموع س أعني أن الزوايا المستوية المجمعة في نقطة س أقل من أربع قوائم

### دعوى نظرية

(٢٤٤) مجموع الزوايا الزوجية لأي زاوية مجسمة ثلاثية أكبر من فائتين وأصغر من ست قوائم واذا أضيف فائتان إلى أصغر الزوايا الزوجية كان المجموع أكبر من مجموع الزاويتين الزوجيتين الباقيتين

أولا - إذا كان  $\alpha$  و  $\beta$  و  $\gamma$  رموزا للزوايا الزوجية للجسم الثلاثية المعلومة  
و  $\alpha$  و  $\beta$  و  $\gamma$  رموزا للزوايا المستوية للجسم الثلاثية المكملة للمعلومة حدث  
 $\alpha - \alpha_2 = 1$  و  $\beta - \beta_2 = 2$  و  $\gamma - \gamma_2 = 3$  أو

$$(\alpha + \beta + 1) - \alpha_2 = \beta + \beta_2 + 1$$

وحيث ان المجموع  $\alpha + \beta + 1$  أكبر من صفر وأصغر من أربع قوائم (٢٤٣) فيكون  
 $\alpha + \beta + \gamma$  أصغر من ست قوائم وأكبر من قائمتين

ثانيا - إذا كانت  $\alpha$  أصغرا للزوايا الزوجية تكون أوجه الجسم المكملة هي  $\alpha - \alpha_2$   
و  $\beta - \beta_2$  و  $\gamma - \gamma_2$  ويكون الوجه  $\alpha - \alpha_2$  هو أكبرها وعلى مقتضى  
ماتقدم (٢٤١) يحدث

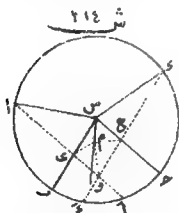
$$\alpha - \alpha_2 > \beta - \beta_2 + \gamma - \gamma_2$$

وبضم  $\alpha + \beta + \gamma$  الى طرفي المتباينة وطرح قائمتين منهما يحدث

$$\beta + \gamma > \alpha + \alpha_2$$
 وهو المراد

### دعوى نظرية

- \* (٢٤٥) لا يمكن تشكيل زاوية مجسمة ثلاثية ثلاث زوايا مستوية معلومة ويجب ويمكن أن  
يكون مجموعها أقل من أربع قوائم وأن تكون كبرها أصغر من مجموع الاثنتين الاخرين  
(شكل ٢٤٤)



- \* قد علم بمسبق (٢٤٣) و (٢٤١) لزوم هذين الشرطين  
والآن نبرهن على كفايتهما  
لتكن  $\beta$  و  $\gamma$  و  $\alpha$  و  $\beta_2$  و  $\gamma_2$  و  $\alpha_2$  الزوايا  
الثلاثة المعلومة فنفرض أنهم موضوعة في مستو واحد  
وأن الزاوية  $\beta$  و  $\gamma$  هي الكبرى  
فتجعل نقطة  $\alpha$  مركزا ونصف قطرا اختياريا يرسم

- \* محيط دائرة وينزل عن النقطتين  $\alpha$  و  $\beta$  العمودين  $\alpha\alpha_2$  و  $\beta\beta_2$  على الضلعين  $\beta$  و  $\gamma$   
فنحيث ان الزاوية  $\beta$  و  $\gamma$  هي الكبرى فيكون القوس  $\beta$  و  $\gamma$  أكبر من كل واحد  
من القوسين  $\alpha$  و  $\beta_2$  و  $\gamma_2$  ولكن القوس  $\alpha$  و  $\beta_2$  و  $\gamma_2$  يجب أن تقع نقطة  $\alpha$

- \* داخل القوس ب أي بين النقطتين ب و و بمثل ذلك يعلم وقوع نقطة د بين النقطتين المذكورتين
- \* لكنه حيث كانت زاوية ب س ح  $>$  اس ب + ح س د يجب أن يكون ب ح  $>$  ا ب + ح د و حيث كان أيضا ب ا = د و ح د = ح د فلا بد أن تقع نقطة أ على عين د
- \* وكذا حيث كان مجموع الزوايا الثلاثة المعروفة أقل من أربع قوائم فتكون نقطة د موضوعة بعد نقطة ح في الاتجاه ا ب ح على المحيط الذي يكون مبدؤه نقطة ا واذن فتوجد نقطة د بين النقطتين أ و ا وتوجد نقطة أ بين النقطتين د و د واذن فينقطع الزوران ا ا و د داخل محيط الدائرة
- \* اذا تقر هذا يقام من نقطة و العمود وم على المستوى ب س ح ثم يرسم في المستوى ح د و محيط دائرة مركزه د ونصف قطره د ا فيقطع د م في نقطة م ثم يوصل م س فتشكل من ذلك الزاوية المنحسمة الثلاثية المعروفة
- \* لانه اذا وصل م د و م ح فالثلثان القائم الزاوية ا س د و م س د فهما س د مشترك بينهما والضلع ا د = د م واذن فيكونان متساويين وينتج من تساويهما أن زاوية ا س د = زاوية د م س ومثلهما المثلثان القائم الزاوية م س ح و د س ح لان بينهما س ح مشترك بينهما والضلع س د = س م لان كل واحد منهما مساو للضلع س ا فيكونان متساويين وينتج من تساويهما أن زاوية م س ح = د س ح

### دعوى نظرية

- \* (٢٤٦) يجب ويكفي لتشكيل زاوية بمجسمة ثلاثية بثلاث زوايا زوجية معلومة أن يكون مجموعها محصورا بين قائمتين وست قوائم وانه لو اضيف قائمتان لاصغر هذا الزوايا كان الناتج أكبر من مجموع الزاويتين الزوجيتين الاخرتين
- \* قد سبق البرهنة (٢٤٤) بضرورة لزوم هذين الشرطين لتشكيل الزاوية المجسمة الثلاثية وأما الآن فلم نتكلم الا لبيان كفايتهما فنقول انه متى توفر هذان الشرطان فانه يمكن تشكيل المجسمة الثلاثية المكحلة للزاوية المجسمة المطلوبة بواسطة الاوجه ٢ - ا
- \* ٢ - ب و ٢ - ج واذن فينيسر تشكيل الزاوية المجسمة الثلاثية بواسطة ثلاث زوايا زوجية

## الفصل الثامن

### تعيينات

- ١ - هل تعيين وضع مستوي مجزئ من منحن معلوم
- ٢ - اذا أنزل من نقطة خارج مستو عمود عليه طوله ٣ متر ومائل طوله ٤ متر والمطلوب تعيين طول مسقط هذا المائل على المستوى
- ٣ - اذا فرضت نقطة متباعدة عن مستوي بعد ٨ متر ورز فيها ورسم محيط دائرة على هذا المستوى وكان نصف قطره فيه ٦ متر والمطلوب تعيين بعد النقطة المذكورة عن أى نقطة من نقط محيط الدائرة
- ٤ - اذا رسمت دائرة في مستو مسطحها ٢٠ مترا مربعا وفرضت نقطة خارجة عنه وعلى العمود القائم من مركز الدائرة وكانت متباعدة عن نقط محيطها بعد ١٥ مترا والمطلوب تعيين بعدها عن مركز الدائرة
- ٥ - المطلوب تعيين محل النقط الفراغية المتساوية البعد عن نقطتين معلومتين
- ٦ - المطلوب تعيين في الفراغ محل النقط المتساوية البعد عن ثلاث نقط معلومة ليست على استقامة واحدة
- ٧ - المطلوب تعيين في مستو محل النقط المتساوية البعد عن نقطة خارجة عنه
- ٨ - المطلوب البرهنة على أن أجزاء المستقيمين المحصورة بين مستويات متوازية هي متناسبة
- ٩ - المطلوب البرهنة على أنه اذا قطع مستو مستويين متوازيين تكون الزوايا الزوجية المتبادلة متساوية والمتناظرة كذلك والمجاورة للمستوى القاطع متكاملة

## الباب الثاني

( في المكرة )

## تعاریف

(٢٤٧) الكرة هي جسم محاط بسطح منحني جميع نقطه على أبعاد متساوية من نقطة داخله

تسمى مركزا ويسمى هذا السطح المنحني بـ سطح الكرة

إذا تصورنا دوران نصف دائرة حول قطرها فإنه يتولد من ذلك جسم الكرة وأما نصف المحيط فإنه

تولد منه سطحها واذن فالكرة هي جسم متحرك وسطها كذلك

(٢٤٨) كل مسـ. تقسم عبر مركز الكرة وينتهي بنقطة من سطحها يسمى نصف قطر الكرة وأما إذا

التي يتعطين من سطحها فانه يسمى قطرا

وعلى مقتضى تعريف الكرة تكون أقطارها متساوية وأنصاف أقطارها كذلك وكل كرتين

متحدثين في المركز وفي القطر يتحدثان معا

اذا دارت كرة حول مركزها بأي طريقة فان سطحها ينطبق دائماً على نفسه وحينئذ فأى جزء من

كف يمكن انطباقه على أى جزء آخر منها أو من غيرها تكون متحدة مع الاولى فى المركز وفى نصف القطر

(٢٤٩) المستوى المماس لسطح الكرة هو الذي لا يشترك معه الا في نقطة واحدة

## الفصل الاول

(في القطع المستوى للكرة)

## دعوى نظرية

(٢٥٠) اذا قطعت الكرة بمستو فان القطع الحادث يكون دائرة (شكل ٢١٥)

ليكن هـ المستوى القاطع و هـ م ح القطع الحادث

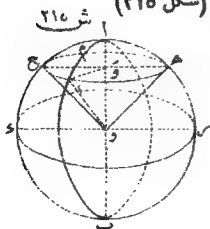
في الكرة فينزل من المركز و العود و و على المستوى

القاطع هـ ح ثم نصل نقطتي و و و بكل واحدة من

النقط ع و م و هـ ... الخ فمن حيث ان المستقيمات

وع ، وم ، وه ، الخ متساوية لكونها أنصاف

أقطار فتكون أبعادها عن نقطة  $O$  موقع العمود متساوية



(o) خواتم

وبناء عليه تكون جميع نقط القطع على أبعاد متساوية من نقطة  $O$  وبذلك يكون محيط دائرة مركزه  $O$

تنبيه - البرهان المتقدم لا يوافق الحالة التي يعرفها المستوى القاطع بمركز الكرة غير أنه يسهل مشاهدته أن جميع نقط هذا القطع على أبعاد متساوية من المركز وكل بعد منها مساو لنصف قطر الكرة وأذن فيكون القطع دائرة لكنه حيثان  $OO > R$  أمكن أن يسمى كل قطع مار بمركز الكرة بدائرة عظيمة وكل قطع لم يمر بمركزها بدائرة صغيرة

نتيجة ١ - إذا جعل  $SO$  رمزا لنصف قطر الكرة و  $SO'$  رمزا لنصف قطر أى دائرة صغيرة و  $SO''$  رمزا للبعد مستوى هذه الدائرة الصغيرة عن مركز الكرة تحصل  $SO'' = SO' + SO$  وهو ارتباط يمكن أن يستنتج منه النظريتان الآتيتان

الاولى - في كرة واحدة أو في كرات متساوية الدوائر الصغيرة المتساوية أبعادها عن مركز الكرة متساوية وبالعكس

الثانية - في كرة واحدة أو في كرات متساوية أصغر الدوائر الصغيرة ما كان بعد مركزها عن مركز الكرة أطول وبالعكس

نتيجة ٢ - لا يمكن أن يقابل المستقيم سطح الكرة في أكثر من نقطتين لأنه لا يقابل الدائرة الحادثة من قطع الكرة بمستوئ مثل عليه في أكثر من نقطتين

نتيجة ٣ - أى دائرتين عظيمتين في كرة واحدة متساويتان ويتقاطعان في قطر ينصف كل واحد منهما

نتيجة ٤ - أى نقطتين مفروضتين على سطح الكرة لا يمكن أن يمر بهما الا قوس واحد من دائرة عظيمة وذلك لأن مستوى الدائرة العظيمة يتعين بنقطتين من سطح الكرة وبمركزها

نتيجة ٥ - أى ثلاث نقط مفروضة على سطح الكرة لا يمكن أن يمر بها الا محيط دائرة واحد وذلك لأن هذه النقط المالم تكن على استقامة واحدة فلا يتعين بها الاستواء واحد

وأما أى نقطتين فإنه يمكن أن يمر بهما مقدار لا نهائى من أقواس الدوائر الصغيرة

نتيجة ٦ - كل دائرة عظيمة تقسم الكرة الى قسمين متساويين

### تعريف

(٢٥١) قطب الدائرة هما نقطتا تقابل قطر الكرة العمودى على مستوى الدائرة بسطح الكرة

فالنقطتان  $A$  و  $B$  (شكل ٢١٥) هما قطبا الدائرة  $HM$

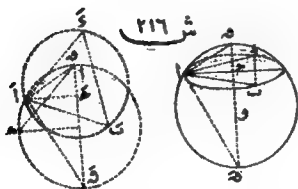
## دعوى نظرية

(٢٥٢) قطب أى دائرة على أبعاد متساوية من نقط محيطها (شكل ٢١٥)  
 لذلك نصل أحد القطبين أ أو ب الى جميع نقط محيط الدائرة الصغيرة كانت أو عظيمة ثم يقال  
 حيث ان جميع هذه المستقيمات هي موازات قد افترقت بالاعداد متساوية عن موقع العمود أو أ أو ب  
 فتكون متساوية واذن تكون أقواس الدوائر العظيمة الموزعة بها كذلك  
 تنبيه - يطلق اسم نصف القطر الكروي للدائرة هـ م ع على قوس الدائرة العظيمة أ م وكل  
 دائرة مرسومة على سطح الكرة مثل هـ م ع يمكن اعتبارها ولديها من دوران نقطة م نهاية القوس  
 أ م حول نقطة أ ولذا تعتبر نقطة أ كأنها مركز الدائرة والقوس أ م نصف قطرها واذن  
 فلكل دائرة مرسومة على سطح الكرة مركزان على سطحها ونصفا قطر ين كرويين متكاملان  
 نصف القطرين الكرويين لاي دائرة عظيمة يكونان متساويين ومقدار كل واحد منهما ربع محيط  
 دائرة عظيمة

تنبيه - يمكن بواسطة برجل ذى فرعين غير متساويين مصنوع صناعة مناسبة رسم محيط دائرة  
 على سطح الكرة مع السهولة التي بها يرسم المحيط المذكور على مستوا انما اذا كانت الدائرة التي يراد  
 رسمها عظيمة فان قطعة البرجل يجب أن تكون مساوية لضلع المربع المرسوم داخل دائرة نصف  
 قطرها مساو لنصف قطر الكرة

## دعوى عملية

(٢٥٣) المطلوب تعيين نصف قطر كرة لا يمكن الدخول فيها (شكل ٢١٦)



نعتبر نقطة ما ن من سطح الكرة  
 كأنها قطب ومنها نرمس محيط الدائرة  
 أ ب و ثم تصور مد القطر ن و ن  
 العمودى على مستوى هذه الدائرة  
 وليكن ح مركزها ثم نصل نقطة ما من  
 نقط المحيط أ الى النقط ن و ن و ح  
 فاذا أمكن رسم المثلث أ ن ق القائم

الزاوية فإنه يتوصل الى معرفة نصف القطر بواسطة أخذ نصف البعد ن و وتصبح المسئلة  
 اذن محولة

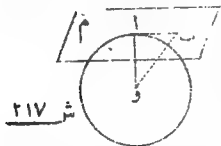
والوصول الى ذلك نعين على محيط الدائرة النقط الثلاثة  $ا$  و  $ب$  و  $د$  وبواسطة قياس الاوتار  $ا ب$  و  $ب د$  و  $د ا$  يرسم المثلث  $ا ب د$  مساويا للمثلث  $ا ب د$  ويرسم عليه محيط دائرة فيكون نصف قطره  $ا ح$  مساويا لنصف القطر  $ا ح$  ثم يرسم بعد ذلك المثلث  $ا ب د$  القائم الزاوية حيث يعلم منه الضلع  $ا د$  والوتر  $ا ب$  ثم يقام من نقطة  $ا$  عمود على الضلع  $ا ب$  ويمد حتى يتلاقى مع امتداد  $ب د$  فيتعين بذلك  $و$

نتيجة - متى تعين نصف قطر الكرة فإنه يمكن أن يرسم به دائرة عظيمة على مستوى العمل وبذلك يمكن أن يتوصل الى مقدار طول ضلع المربع المرسوم داخلها الذي يحتاج اليه الامر عندما يراد رسم دائرة عظيمة

### دعوى نظرية

(٢٥٤) المستوى العمودي على نهاية نصف قطر الكرة يكون مماسا لها وبالعكس (شكل ٢١٧)

أولا - ليكن  $م$  مستويا عموديا على نهاية نصف القطر  
وا فمن حيث ان كل مستقيم مثل  $ب و$  يكون مائلا  
على المستوى  $م$  فيكون أطول من العمود وبذلك تكون  
نقطة  $ب$  خارجة عن سطح الكرة واذن فلا يشترك  
المستوى  $م$  مع سطحها الا في نقطة  $ا$



ثانيا - اذا كان  $م$  مستويا مماسا لسطح الكرة أى لا يشترك معها الا في نقطة  $ا$  فكل مستقيم مثل  $ب و$  يكون أطول من البعد  $وا$  لان نقطة  $ب$  خارجة عن سطح الكرة واذن فالمستقيم  $وا$  أصغر جميع المستقيمات التي يمكن مقادها من نقطة  $و$  الى المستوى  $م$  وبناء عليه فيكون عمودا على المستوى وهو المراد

نتيجة - كل نقطة مفروضة على سطح الكرة لا يمكن أن يمر بها الامستوى واحد مماس لسطح الكرة

### دعوى نظرية

(٢٥٥) خط تقاطع سطحين كرتين هو محيط دائرة يكون مستويه عمودا على المستقيم الواصل بين

مركزيهما وأما مركزه فهو موجود على المستقيم المذكور (شكل ٢١٨)

ليكونا  $و و$  مركزي الكرتين فتسوم  $م و$  مستويا بالمستقيم المار بالمركزين فيقطع الكرتين





## الفصل الثاني

(في المثلثات وكثيرى الاضلاع الكروية)

### تعريف

\* (٢٥٧) المثلث الكروى هو جزء من سطح الكرة محصور بين ثلاث أقواس دوائر عظيمة  
\* يجب أن نعتبر دائماً عند دراسة المثلثات الكروية أن يكون أى ضلع من أضلاعها أصغر من  
\* نصف محيط

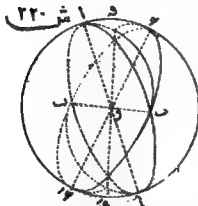
\* بتوصيل المثلث الكروى من ستة أجزاء ثلاثة أضلاع  $\alpha$  و  $\beta$  و  $\gamma$  وثلاث زوايا  
\*  $\alpha$  و  $\beta$  و  $\gamma$  مقابلة لها

\* (٢٥٨) كثيرى الاضلاع الكروى هو جزء من سطح الكرة محاط بجمللة أقواس دوائر عظيمة  
\* متقاطعة مثنى و يقال له محدب متى كان موجوداً بتمامه فى احدى نصفي الكرة للمحددين  
\* بامتداد أحد أضلاعه

\* أى ضلع من أى كثيرى أضلاع كروى محدب أصغر دائماً من نصف محيط دائرة عظيمة لانه لو فرض  
\* أن أحد أضلاعه يزيد عن ذلك فانه لا يتأتى وجود الشكل بتمامه فى احدى نصفي الكرة  
\* المحددين بامتداد أحد الضلعين الجاورين للضلع المذكور وبناء عليه لا يكون الشكل محدباً

### دعوى نظرية

\* (٢٥٩) كل كثيرى أضلاع كروى يقابله آخر مرسوم على سطح الكرة تكون أجزاؤه متساوية  
\* أجزاؤه الأولى غير أنها موضوعة فى ترتيب مغاير لوضع ترتيبها فى الأول (شكل ٢٢٠)

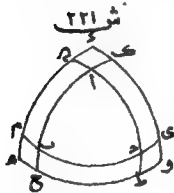


\* فاذا وصل بين المركز و بين رؤس الشكل بمستقيمات  
\* ومدت على استقامتهن الى الجهة الأخرى حتى تلاقى سطح  
\* الكرة فانه يتشكل من ذلك كثيرى أضلاع كروى جديد اذا قورن  
\* بالشكل الاول نجد فيهما الاضلاع متساوية لانها مقاييس  
\* زوايا متساوية لتساوى الزوايا الزوجية المتقابلة بالحرف (٢٢٧)  
\* فالثلة غير أننا نجد اختلافاً فى ترتيب وضع الاضلاع والزوايا  
\* فيها وهو أمر سهل ياتى لانه من المعلوم اذا أريد ترتيب أجزاء أى كثيرى أضلاع كروى فانه

- \* يتبع السير على محيطه وعلى سطح الكرة بدون الدخول فيها متجها دائما نحو جهة معينة
- \* ولتكن من الشمال الى اليمين مثلا ثم نمرأجرام على حسب ترتيب المرور عليها
- \* اذا قرر هذا واعتبرنا أن وضع النقط الثلاثة للثلاث  $أ ب ح$  هو طردي ظهر لنا أن النقط
- \* المناظرة لها في المثلث  $أ ب ح$  مغايرة لها في الوضع لان الانتقال من نقطة  $أ$  الى  $ب$  يقتضى
- \* الصعود فوق مستوى العمل بخلاف الانتقال من  $أ$  الى  $ب$  فانه يقتضى الهبوط تحته
- \* تنبيه - كل كثيرى أضلاع كرويين متماثلين لا يمكن انطباقهما على بعضهما لانهما يمكن
- \* ذلك الزم انطباق الاجزاء المتساوية المتحددة الاسم على بعضها وهذا يقتضى اتحادهما في ترتيب
- \* الوضع وهو مخالف للغرض

### دعوى نظرية

- \* (٢٦٠) لا يمكن أن نأخذنا كرويا تكون رؤسه أقطابا لأضلاع مثلث كروى معلوم بحيث
- \* يكون بعد كل واحد من هذه الأقطاب عن الرأس المقابلة له من المثلث المفروض أقل من ربع
- \* محيط دائرة عظيمة فانه يتكون ما يسمى بالمثلث القطبي للمثلث الاول ويحدث
- \* أولا - ان المثلث المعلوم يكون مثلثا قطبيا للمثلث المنشأ



- \* (شكل ٢٢١)
- \* ثانيا - ان كل زاوية من أحد المثلثين تكون مكافئة للضلع
- \* المناظر لها من المثلث الثانى
- \* قبل البرهان على هذه النظرية نذكر الفائدة الآتية

### فائدة

- \* كل نقطة مفروضة على سطح الكرة بين محيط دائرة عظيمة وقطبها أى موجودة معها في نصف
- \* كرة واحد يكون بعدها عن هذا القطب أقل من ربع محيط دائرة عظيمة وبالعكس اذا كان
- \* البعدين نقطتين على سطح الكرة أقل من ربع محيط دائرة عظيمة وكانت احدهما قطبا لمحيط
- \* دائرة عظيمة تكون النقطتان المذكورتان موجودتين في نصف كرة واحد من نصفها المحددين
- \* بمحيط الدائرة العظيمة المذكورة

- \* ولا يحتاج هذه الفائدة الى البرهنة عليها لبداهتها لما هو معلوم من أن بعد قطب أى دائرة
- \* عظيمة عن أى نقطة من نقطتها هو ربع محيط دائرة عظيمة

\* اذاقرر هذا يقال اذا كان  $ا ب$  هو المثلث الكروي المعلوم فمن حيث ان قطب الضلع  $ب$  يجب أن يكون متباعدان كل واحدة من النقطتين  $و$  و  $ح$  بمقدار ربع محيط دائرة عظيمة فيعين اذن بواسطة أن يركز في كل واحدة من هاتين النقطتين ويعلم مساو لربع محيط دائرة عظيمة يرسم قوسا محيطي دائرتين عظيمتين  $د ه$  و  $و$  يتقاطعان في نقطتين  $ز$  فخذ احدهما  $ز$  الموجودة في جهة واحدة مع النقطة  $ا$  بالنسبة للقوس  $ب ح$  ثم اذا أجرى عمل مشابه لذلك في تعيين النقطتين  $ه$  و  $و$  قطبي الضلعين  $ا ح$  و  $ا ب$  فانه يتشكل من ذلك المثلث القطبي  $د ه و$

\* برهان الأول - يقال حيث ان نقطة  $ا$  متباعدة عن النقطتين  $و$  و  $ه$  من قوس الدائرة العظيمة  $د ه$  بمقدار ربع محيط دائرة عظيمة فتكون اذن قطبا للقوس  $د ه$  وزيادة على ذلك حيث ان البعدين  $ا و$  أقل من ربع محيط دائرة عظيمة على مقتضى ما ذكر بالفائدة وكانت  $ا$  قطبا للقوس  $د ه$  فتكون هي ونقطة  $ز$  في نصف الكرة السدد بالقوس  $د ه$  واذن فيكون المثلث  $ا ب ح$  قطبيا للمثلث  $د ه و$  أعني أن المثلث  $ا ب ح$  يمكن ايجاده من المثلث  $د ه و$  بالطريقة التي استعملت لايجاده من المثلث  $ا ب ح$

\* برهان الثاني - يقال من المعلوم أن زاوية  $ا$  تقاس بالقوس  $ح ط$  وأن  $ح ط + ه و = (ح و - ط و) + (ه ط + ط و) = ح و + ه ط$  يساوي ربعي محيط دائرة عظيمة أي يساوي قائمتين وهو المراد

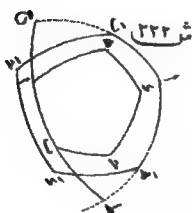
\* تنبيه - يمكن مطابقة هذه النظرية مع التي تقدم ذكرها للزوايا المجسمة الثلاثية (٢٣٨) وذلك لانا لو وصلنا مركز الكرة  $م$  بجميع رؤس المثلثين فانا نتوصل على المجسمتين الثلاثيتين  $م ا ب ح$  و  $م د ه و$  ونظرا لتعريف القطب يكون  $م د$  عمودا على المستوى  $ب ح م$  وعلى مقتضى شروط انتخاب القطب  $د$  يكون هو ونقطة  $ا$  في جهة واحدة بالنسبة للوجه  $ب ح م$  وحينئذ تكون المجسمة  $م د ه و$  مكمله للمجسمة  $م ا ب ح$  ويمكن أن يقال من الآن على وجه العموم أن كل نظرية من نظريات المثلثات الكروية أو المضلعات الكروية يقابلها نظرية مطابقة لها على المجسمات الثلاثية أو على المجسمات كثيرة الالوجه

### \* دعوى نظرية

\* (٢٦١) اذا أنشأنا كثيرا أضلاع كروي تكون رؤسها أقطابا لكثير أضلاع كروي محدد بحيث يؤخذ كل واحد من هذه الأقطاب بالنسبة للضلع المقابل له في نصف الكرة المشتملة على

\* كثير الاضلاع المعالم فانه يتشكل من ذلك مضلع كروي قطبي للمضلع الكروي المحدد بالمعالم  
\* ويبحث

\* أولا - ان كثيرا الاضلاع المعالم يكون قطبيا لكثير الاضلاع المنشأ (شكل ٢٢٢)



\* ثانيا - ان زوايا أحدهما تكون مكملة للاضلاع

\* المناظرة لهما من الثاني

\* ليكن  $أ ب ح د هـ$  مضلعا كرويا محسوبا معا لهما

\* ثم اعتبرنا نقطة  $أ$  إحدى قطبي القوس  $ب أ$

\* الموجودة مع  $هـ$  في نصف الكرة المحدد بامتداد القوس

\*  $أ ب$  والموجود به النقطة  $هـ$  و  $د$  و  $ح$  بمعنى أن

\* بعد نقطة  $أ$  عن كل واحدة من هذه النقاط الثلاثة

\* أقل من ربع محيط دائرة عظيمة واستمرينا على هذا المتوال في سائر الاقطاب  $ب$  و  $ح$

\* و  $د$  و  $هـ$  فانه يتكون من ذلك المضلع القطبي  $أ ب ح د هـ$  بواسطة وصل هذه

\* الاقطاب ببعضها بالقوس ودوائر عظام

\* برهان الاول - يقال حيث ان نقطة  $أ$  مشتركة بين القوسين  $أ ب$  و  $أ هـ$  فيكون

\* بعدها عن كل واحدة من النقطتين  $أ$  و  $هـ$  مساويا ربع محيط دائرة عظيمة وحينئذ

\* فتكون قطبا للقوس الدائرة العظيمة  $أ هـ$  وزيادة على ذلك حيث ان بعد نقطة  $أ$  عن كل

\* واحدة من النقاط  $هـ$  و  $د$  و  $ح$  أقل من ربع محيط دائرة عظيمة بناء على انضاب الاقطاب

\*  $أ ب$  و  $ب ح$  و  $ح د$  و  $د هـ$  فيكون كثيرا الاضلاع  $أ ب ح د هـ$  قطبيا لكثير الاضلاع

\*  $أ ب ح د هـ$  بمعنى ان كثيرا الاضلاع  $أ ب ح د هـ$  يمكن إيجادها من كثيرا الاضلاع

\*  $أ ب ح د هـ$  بالطريقة التي استعملت لإيجادها من كثيرا الاضلاع  $أ ب ح د هـ$

\* برهان الثاني - يقال اذا مدام القوس  $أ ب$  حتى يقابل القوسين  $أ هـ$  و  $أ ب$  في

\* النقطتين  $ط$  و  $ح$  فان الزاوية  $أ$  تقاس بالقوس  $ح أ ب ط$  غير أن

$$أ ب + ح ط = (ح ط - أ) + (أ ط + ح ط) = ح ط + أ ط$$

\* تساوي ربعي محيط دائرة عظيمة أي تساوي قائمتين وهو المراد

\* نتيجة - يتوصل بهذه النظرية الى طريقة تفسير شكل على سطح الكرة وأما الشكلان

\*  $أ ب ح د هـ$  و  $أ ب ح د هـ$  فهما موجودان بحيث ان كل رأس من أحدهما يقابلها ضلع

\* من الآخر بالعكس وحينئذ فيمكن اعتبار تسمية أحدهما من المشكلين بالآيل القطبي للثاني

- \* تنبيه - وكان يمكن ايراد نظرية مقابلة لهذه في الباب الاول من هذا الجزء على الزوايا  
المجسمة الكثيرة الالوجه لاختلاف عنها الا في الصورة فقط

### دعوى نظرية

- \* (٢٦٢) كل مثلث كروي متساوي الساقين زاويتيہ المقابلتان لساقيه متساويتان وبالعكس



(شكل ٢٢٣)

- \* اذا كان الضلع  $ا ب = ا ح$  تكون زاوية

$ب = ح$  وبالعكس

- \* برهان الاول - نضع بجانب المثلث  $ا ب ح$

مماثله  $ا ح ب$  ثم نطبقه عليه بأن نضع

الزاوية  $ا$  على مساويتها  $ا$  فتقع نقطة

- \*  $ح$  على  $ب$  ونقطة  $ب$  على  $ح$  وينطبق حينئذ  $ح$  على  $ح$  (٢٥٠ نتيجة ٤)

وينطبق المثلثان على بعضهما وتكون زاوية  $ب = ح$  وحيث كانت زاوية  $ب = ح$

تكون زاوية  $ب = ح$  وهو المراد

- \* برهان الثاني - يقال انه يسهل البرهنة على هذه النظرية بواسطة التطبيق غير انه يمكن

البرهنة عليها أيضا بواسطة الايل القطبي فيقال اذا كان  $ا ب ح$  هو المثلث القطبي للثلث

$ا ب ح$  فمن حيث ان الزاويتين  $ب$  و  $ح$  متساويتان يكون الضلعان  $ا ب$  و  $ا ح$

من المثلث القطبي متساويين وعلى مقتضى الحالة الاولى من هذه النظرية تكون زاوية

$ب = ح$  وحيث ان هاتين الزاويتين متساويتان يكون الضلعان  $ا ب$  و  $ا ح$  من

المثلث  $ا ب ح$  القطبي للثلث  $ا ب ح$  متساويين وهو المراد

### دعوى نظرية

- \* (٢٦٣) يتساوى المثلثان الكرويان المرسومان على كرة واحدة أو على كرات متساوية اذا وجد

فيهما واحد من الامور الآتية

\* أولا - اذا تساوى من أحدهما زاوية والضلعان المحيطان بهما بالنظر هما من الثاني

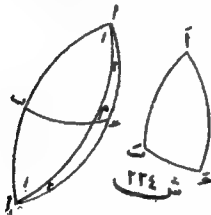
\* ثانيا - اذا تساوى من أحدهما ضلع والزوايتان المجاورتان للضلع هما من الثاني

\* ثالثا - اذا تساوت فيهما الاضلاع الثلاثة المتناظرة

\* رابعا - اذا تساوت فيهما الزوايا المتناظرة

\* برهان الأول - يقال فطبق أحد المثلثين على الآخر كما جرى ذلك بمرة (٢٦٢) أولا  
 \* برهان الثاني - يقال أنه يمكن البرهنة على هذه النظرية بواسطة التطبيق غير أنه يمكن  
 \* ترجيعها إلى الحالة الأولى بواسطة الآيل القطبي فيقال إذا كان  $\Delta ABC$  و  $\Delta DEF$  المثلثين  
 \* القطبيين للمثلثين  $ABD$  و  $ACD$  الأصليين فمن حيث أنه يوجد في أحد المثلثين الأصليين  
 \* ضلع ومجاورتاه من الزوايا مساوية لنظائرها من الثاني يكون في أحد المثلثين القطبيين لهما  
 \* زاوية والضلعان المحيطان بهما مساوية لنظائرها من المثلث القطبي الثاني وعلى مقتضى  
 \* ما ذكر في الحالة الأولى يكون المثلثان القطبيان متساويين وينتج من تساويهما تساوي باقي  
 \* الأجزاء فيهما أعني أن الضلع والزوايتين المجاورتين له الباقي من المثلث القطبي الأول مساوية  
 \* لنظائرها من الثاني وهذا يستلزم تساوي باقي الأجزاء في المثلثين الأصليين وهو المطلوب

\* برهان الثالث - يقال (شكل ٢٢٤) نضع المثلث  $ABC$  تحت المثلث  $DEF$   
 \* بحيث يطبق الضلع  $BC$  على مساوية  
 \*  $EF$  فيستكون من ذلك الشكل الرباعي  
 \*  $ABCF$  ثم فصلين  $AF$  و  $BE$  بقوس دائرة  
 \* عظيمة فالمثلث  $ABC$  فيه الضلعان  $AB$   
 \* و  $BC$  متساويان لأن كل واحد منهما  
 \* يساوي الضلع  $AC$  فتكون الزاويتان  
 \*  $BAC$  و  $BCA$  متساويتين وكذا ينتج من



\* المثلث  $ABF$  أن زاوية  $BAF = BCF$  واذن فتكون زاوية  $BAC = BCF$   
 \* لانهما مجموع زاويتين متساويتين (وقد يتأى أن يكونا فاصل زاويتين متساويتين)  
 \* وبناء عليه يكون في أحد المثلثين زاوية والضلعان المحيطان بهما مساوية لنظائرها من الثاني  
 \* فيكونان متساويين (أولا)

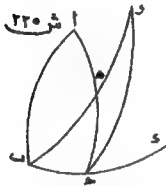
\* برهان الرابع - يقال أنه توصل إلى إثبات هذه النظرية بواسطة الآيل القطبي وذلك لانه  
 \* حيث كانت الزوايا متساوية في المثلثين  $ABC$  و  $DEF$  والمعلومين فتكون أضلاع  
 \* مثلثيها القطبيين متساوية على التناظر وعلى مقتضى الحالة الثالثة تكون زواياهما متساوية  
 \* غير أن تساوي الزوايا المتناظرة من المثلثين القطبيين يستلزم تساوي الأضلاع المتناظرة  
 \* في المثلثين الأصليين واذن فقد رجع الأمر إلى الحالة السابقة

\* تنبيه ١ - إذا لم تكن الأجزاء المتساوية في المثلثين موضوعة على ترتيب واحد فمما في أي

- \* حالة من هذه الاحوال فيكون المثلثان المقروضان متماثلين وجيتند قجبري البرهنة على أحدهما وعلى المائل الثاني
- \* تتيه ٢ - الاحوال الثلاثة الاول من هذه النظرية تشترك فيها المثلثات المستقيمة الاضلاع دون الحالة الرابعة لكأ لو أمعنا النظر وكأ لم نتحصل من تساوي الزوايا في المثلثات الكروية غير تناسب الاضلاع كافي المثلثات المستقيمة الاضلاع ثم لاحظنا أن نسبة الاقواس للتشابه الى بعضها كنسبة أنصاف أقطار دوائرها لرأينا أن تناسب الاضلاع يقتضي تساويها لتساوي أنصاف أقطار دوائرها حيث أن قيدنا تساوي المثلثات الكروية بأنها تكون مرسومة على كرة واحدة أو على كرات متساوية فلهذا كان تساوي الزوايا في المثلثات الكروية قاضيا بتساوي أضلاعها

### دعوى نظرية

- \* (٢٦٤) الزاوية الخارجة من أي مثلث كروي أكبر من كل واحدة على حدتها من الزاويتين الداخليتين من المثلث المجاورة لها (شكل ٢٢٥)
- \* ليكن المطلوب البرهنة على أن زاوية  $\alpha$  أكبر من  $\beta$
- \* لذلك نصل بين نقطة  $\beta$  ومنصف  $\alpha$  بقوس الدائرة العظيمة  $\beta\gamma$  ثم نغده ونأخذ من القوس  $\gamma\delta$  هو يساوي
- \*  $\gamma\delta$  ونصل قوس الدائرة العظيمة  $\alpha\delta$  الذي يقسم الزاوية  $\alpha$  الى قسمين



- \* فإذا قورن المثلثان  $\gamma\delta\alpha$  و  $\alpha\beta\gamma$  نجد هما متماثلين لتساوي ضلعين والزاوية المحصورة بينهما من أحدهما الضلعين والزاوية المحصورة بينهما من الثاني مع اختلافهما في ترتيب الوضع وبناء على ما تقدم تساوي فيهما باقي الأجزاء وتكون زاوية  $\gamma\delta\alpha$  و  $\alpha\beta\gamma$  و  $\alpha = \beta$  وأذن تكون زاوية  $\alpha > \beta$  وهو المطلوب

تتيه - كان يمكن إيراد ما يقابل هذه النظرية في الباب الأول من هذا الجزء

### دعوى نظرية

- \* (٢٦٥) الضلع الأكبر من أي مثلث كروي تقابله الزاوية الكبرى وبالعكس (شكل ٢٢٦)
- \* أيلا - ليكن الضلع  $\alpha > \beta$  ويطلب البرهنة على أن زاوية  $\alpha > \beta$



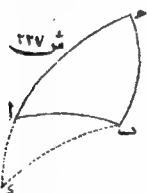
- \* لذلك يؤخذ من الضلع الأكبر  $ا$  الجزء  $ا د = ا ب$  ثم فصل قوس الدائرة العظيمة  $ب د$  فتكون زاوية  $ا د ب =$  زاوية  $ا ب د$  وحيث كانت
- \* زاوية  $ا د ب$  خارجة عن المثلث  $ح د ب$  فتكون أكبر من
- \* زاوية  $ح$  ومن باب أولى تكون زاوية  $ا ب د < ح$
- \* ثانيا - لتكن زاوية  $ب < ح$  ويطلب البرهنة على أن
- \*  $ا < ا ب$



- \* وذلك لأنه إن لم يكن  $ا$  أكبر من  $ا ب$  لكان مساويا له أو أصغر منه وإذاً تكون زاوية
- \*  $ب$  مساوية أو أصغر من زاوية  $ح$  وهما نتيجتان متعارضان للقرص فيكون  $ا < ا ب$
- \* وهو المطلوب

### دعوى نظرية

- \* (٢٢٦) أي ضلع من أي مثلث كروي أصغر من مجموع الضلعين الآخرين (شكل ٢٢٧)
- \* يكفي أن نبرهن على أن الضلع الأكبر  $ب د$  أصغر من مجموع
- \* الآخرين الآخرين



- \* لذلك يؤخذ الضلع  $ا د$  ويؤخذ عليه المقدار  $ا د = ا ب$
- \* ثم يوصل قوس الدائرة العظيمة  $ب د$  فالمثلث الحادث  $ا ب د$
- \* يكون متساوي الساقين وتكون فيه زاوية  $د =$  زاوية
- \*  $ا ب د$  وإذاً فتكون أصغر من زاوية  $د ح$  وبناء على
- \* ما تقدم (بمرة ٢٦٥) يكون الضلع  $ب د$  أصغر من الضلع  $ا د$  من المثلث  $د ح ب$
- \* أو أصغر من  $ا + ا د$  أي من  $ا + ا ب$  وهو المراد
- \* نتيجة - وبما ذكره فيجب أن أي ضلع من المثلث الكروي أكبر من الفرق بين الضلعين
- \* الآخرين

### دعوى نظرية

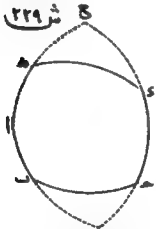
- \* (٢٢٧) مجموع أضلاع أي مثلث كروي أصغر من محيط دائرة عظيمة (شكل ٢٢٨)
- \* إذا كان  $ا ب د$  المثلث المعطى فانا عند الضلعين  $ا د$  و  $ا ب$  إلى أن يتلاقيا في
- \* نقطة  $د$  وبذلك يكون كل واحد من القوس  $ا ب د$  و  $ا د$  نصف محيط دائرة عظيمة



- \* لكن  $ا ب + ا ب > ا ب + ا ب + ا ب$
- \*  $ا ب + ا ب + ا ب (٢٢٦) أو ا ب + ا ب$
- \*  $ا ب + ا ب > ا ب + ا ب أو > محيط$
- \* دائرة عظيمة
- \* تنبيه - هذه النظرية والتي بعدها تقابلها نظرية
- \* (غرة ٢٤٣)

### دعوى نظرية

- \* (٢٢٨) مجموع أضلاع أى مضلع كروى أقل من محيط دائرة عظيمة (شكل ٢٢٩)



- \* لذلك يعد الضلعان  $ا هـ$  و  $د هـ$  الحاصلان بينهما
- \* الضلع  $د هـ$  حتى يتلاقيا فيتوصل الى مضلع كروى
- \* ينقص رأسان الأول غير أن محيطه أطول من محيط
- \* المضلع الأول وبإعادة هذه العملية مرارا فانا نتوصل
- \* أخيرا الى مثلث كروى محيطه أطول بكثير من محيط
- \* المضلع المعالوم
- \* نتيجة - نهاية طول محيط أى مضلع كروى محدب
- \* هو محيط الدائرة العظيمة المستعمل قاعدة لنصف الكرة المرسوم عليها هذا المضلع

### دعوى نظرية

- \* (٢٢٩) مجموع زوايا أى مثلث كروى أكبر من قائمتين وأصغر من ست قوائم وإذا أضيف
- \* لأصغرها قائمتان كانا الناتج أكبر من مجموع الزاويتين الأخرتين
- \* إذا دلت الحروف  $ا$  و  $ب$  و  $ج$  على زوايا المثلث الثلاثة مرتبة على حسب ترتيب مقاديرها
- \* التصاعدي واعتبرنا المثلث القطبي له وكانت أضلاعه  $أ$  و  $ب$  و  $ج$  مرتبة على حسب
- \* ترتيب مقاديرها التنازلية لانهم مكمل الزوايا  $ا$  و  $ب$  و  $ج$  حدث
- \* أولا - حيث ان كل واحدة من الزوايا  $ا$  و  $ب$  و  $ج$  أقل من قائمتين يكون مجموعها
- \* أقل من ست قوائم وقد تقدم (٢٢٧) أن

$$* \quad \begin{aligned} & \text{أ} + \text{ب} + \text{ج} > \text{د} \text{ أو } \text{د} - \text{ب} - \text{ج} > \text{أ} \text{ أو } \text{د} - \text{أ} - \text{ب} > \text{ج} \\ & \text{أو } \text{أ} + \text{ب} + \text{ج} < \text{د} \end{aligned}$$

\* ثانيا - من المعلوم أن  $\text{أ} > \text{ب} + \text{ج}$  (٢٦٦) فيكون

$$* \quad \begin{aligned} & \text{د} - \text{أ} > \text{ب} - \text{ب} - \text{ج} + \text{ب} - \text{ب} - \text{ج} \text{ أو } \text{د} - \text{أ} > \text{ب} - \text{ب} - \text{ج} + \text{ب} - \text{ب} - \text{ج} \\ & \text{نتيجة -} \text{ ينفع مما ذكر أن المثلث الكروي يمكن أن يكون فيه زاويتان قائمتان أو منفرجتان} \\ & * \text{أو ثلاث زوايا قائم أو منفرجة} \end{aligned}$$

\* في حالة ما يكون الزاويتان ب و ج قائمتين في المثلث الكروي تكون الرأس أ قطبا  
\* للقاعدة ب ج ويكون مقدار كل ضلع من ضلعي المثلث المحاطين بزاوية الرأس أ ربع  
\* محيط دائرة عظيمة

\* وأما في حالة ما تكون الزوايا الثلاثة قائمة فإن مقدار كل ضلع من أضلاعه يساوي ربع محيط  
\* دائرة عظيمة ويقال لهذا المثلث قائم الزوايا الثلاثة

\* إذا تصورنا تمرر محيط دائرة عظيمة وفرضنا أن و و ق قطبا هاتم مرزبا المستقيم المر  
\* بهم مستويين متعامدين فإن هذه المستويات الثلاثة المتعامدة تقسم سطح الكرة الى ثمانية  
\* مثلثات كروية قائمة الزوايا الثلاثة وجميعها متساوية لتساوى أضلاعها ببعضها واذن  
\* فالمثلث الكروي القائم الزوايا الثلاثة يعادل ثلث الكرة التي هو جزء منها

\* تنبيه - يمكن بواسطة نظرية (ثمرة ٢٦٨) استخراج نظرية أخرى تتعلق بمجموع زوايا  
\* المضلع الكروي بواسطة الأيل القطبي

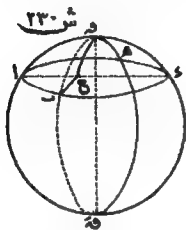
### \* دعوى نظرية

\* (٢٧٠) قوس الدائرة العظيمة الذي مقداره دون نصف محيط الواصل بين نقطتين على سطح  
\* الكرة هو أقصر طريق بين هاتين النقطتين على سطحها  
\* والبرهنة على هذه النظرية مؤسسة على القائدين الآتيين

### \* القائدة الاولى

\* البعد الاصغر بين قطب أي دائرة وبين جميع نقاط محيطها واحد (شكل ٢٣٠)  
\* إذا كان و قطبا لمحيط الدائرة أ ب د و وصل بينه وبين كل واحدة من النقطتين أ و ب  
\* بقوس دائرة عظيمة وفرض أن و ج هو أصغر بعددين القطب و و بين نقطة ب

- \* وتصورنا دوران نصف الكرة الموجود على عین الدائرة العظيمة و ب ق حول القطر و ق
- \* حتى تتطبق هذه الدائرة على الدائرة و ا ق فان
- \* قوس الدائرة العظيمة و ب ينطبق على مساويه و ا
- \* وينطبق نصف الكرة و ب ق انطباقا تاما على
- \* نصف الكرة و ا ق ب ه ولما كان الخط و ح ب
- \* لا يزال عند الانطباق دالا على أقصر بعدين و و ب
- \* فيكون اذن هو أقصر بعدين و و ا



### الفائدة الثانية

- \* اذا كان كل واحد من قوسي الدائرتين العظيمتين ا ب و ا ح دون نصف محيط (شكل ٢٣١)
- \* وفرض أن ا ح > ا ب فأقول ان البعد الاصغر
- \* بين النقطتين ا و ح أقل من البعد الاصغرين
- \* النقطتين ا و ب
- \* وللبهنة على ذلك نعتبر نقطة ا قطبا ونرسم منها محيط
- \* دائرة بنصف قطر مساو ا ح فتكون هذه الدائرة
- \* قاطعة ضرورية للقوس ا ب في نقطة بين ا و ب
- \* ثم اذا اعتبر القوس ا م ب انه أصغر طريق بين



- \* النقطتين ا و ب فانه يقطع المحيط ح د في نقطة م ويكون ا م أصغر طريق
- \* بين النقطتين ا و م لانه ان لم يكن كذلك ووجد أقصر منه فلا يكون ا م ب أصغر طريق
- \* بين ا و ب وهو مخالف للفرض وحيث ان أقصر طريق بين ا و م مساو لا قصر طريق
- \* بين ا و ح كما تقدم في الفائدة الاولى يكون أقصر طريق بين ا و ح اذن هو أقل من
- \* أقصر طريق بين ا و ب



- \* اذا قرر هذا يقال (شكل ٢٣٢) ليكن ا ب قوسا من محيط
- \* دائرة عظيمة دون نصف محيط واصلا بين النقطتين ا و ب
- \* فاذا فرض أن نقطة ح الخارجة عن القوس ا ب احدى
- \* نقط البعد الاصغرين نقطتي ا و ب ووصل قوسا للدائرتين
- \* العظيمتين ا ح و ح ب وأخذ ا د يساوي ا ح فعلى مقتضى ما ذكر (بغرة ٢٦٦)

- \* يكون  $AB > AC + CB$  ثم اذا طرح من طرفي هذه المتباينة  $AB$  و  $AC$  المتساويان
- \* يحدث  $CB > CB$
- \* لكنه حيث ان أقصر طريق بين  $A$  و  $C$  مساو لأقصر طريق بين  $A$  و  $B$  بناء على ما تقرر
- \* في الفاتئة الاولى وكانت  $C$  إحدى نقط أقصر طريق بين  $A$  و  $B$  فيكون القوس  $CB$
- \* أصغر من أقصر طريق بين  $C$  و  $B$  وهو ناتج مستحيل بناء على ما تقرر في الفاتئة الثانية حيث
- \* قد ثبت أن  $B > AC$  من  $B$  وحيث فلا يمكن وجود نقطة من نقط أقصر طريق
- \* بين  $A$  و  $B$  خارجة عن القوس المذكور واذن فيكون هو عين القوس  $AB$
- \* تنبيه - قد فرض في البرهان السابق أن كل واحد من القوسين  $AC$  و  $CB$  دون  $AB$
- \* حيث لا يمكن أن يفرض خلاف ذلك لانه لو فرض أن  $AC > AB$  فان أقصر طريق بين
- \*  $A$  و  $B$  يكون أقل من أقصر طريق بين  $A$  و  $C$  واذن فلا يمكن أن تكون نقطة  $C$
- \* موجودة على الخط الاول

### الفصل الثالث

(في مسامح المثلثات والمضلعات الكروية)

### تعريف

- \* (٢٧١) حيث انه يمكن تطبيق أي جزء من سطح الكرة على أي جزء آخر منها كان من
- \* الممكن أيضا مقارنة أي جزأين منها ولما كان المثلث الكروي القائم الزوايا الثلاثة ثابت
- \* المقدار بالنسبة لسطح الكرة (٢٦٩) فنعتبره اذن وحدة لسطوح الكروية
- \* ومن المعلوم أنه لا يمكن مقارنة مساحة أي جزء من سطح الكرة بمساحة المتر المربع لان المستوى
- \* مهما كان صغيره لا يمكن تطبيقه على سطح الكرة غيراً ما تكلم في الجزء الرابع كيف يمكن اجراء
- \* تلك المقارنة
- \* (٢٧٢) الشقة هي جزء من سطح الكرة محصورة بين نصفي دائرتين عظيمتين وزاوية
- \* الشقة هي زاوية القوسين المحددتين لها

## دعوى نظرية

- \* (٢٧٢) النسبة بين أى شقتين كالنسبة بين زاويتيها  
 \* وللبرهنة على ذلك يقال  
 \* أولا - ان الشقتين المتساويتين زاويتاهما كذلك وبالعكس  
 \* وذلك لان تساوى الشقتين يقتضى انطباقهما على بعضهما وبذلك تنطبق زاوية احدهما على  
 \* زاوية الاخرى وأما اذا كان الزاويتان متساويتين فان زوجيتى الشقتين تكونان متساويتين  
 \* وبذلك تنطبق الشقتان على بعضهما  
 \* ثانيا - اذا كان الشقتان متساويتين وفرض أن النسبة بينهما كالنسبة بين العددين ٥ و ٣  
 \* مثلا ثم قسمت الشقة الاولى الى خمسة شقات متساوية والثانية الى ثلاثة متساوية وكل واحدة  
 \* منهما مساوية لكل شقة من الشقات الخمس الاولى فان زاويتيها الزوجيتان أو المستويتان  
 \* تصبحان مقسمة الى زوايا متساوية الاولى الى خمسة والثانية الى ثلاثة وبناء عليه يحصل  
 \* هذا تناسب

$$\frac{\text{شقة أ}}{\text{زاوية أ}} = \frac{\text{شقة ب}}{\text{زاوية ب}}$$

- \* بفرض أن أ و ب يدلان على زاويتي الشقتين  
 \* ثالثا - اذا كان الشقتان غير متساويتين فانه يبرهن بمثل ما تقدم (بمرة ٨٠ جزء اول)  
 \* على أن النسبة بينهما هي كالنسبة بين زاويتيها وهو المراد  
 \* نتيجة ١ - اذا فرضنا أن الشقة ب هي الشقة القائمة للمقابل للزاوية القائمة وحيدة  
 \* الزوايا المستوية أمكن أن يعبر عن هذا تناسب بان الشقة تقاس بزاويتها  
 \* نتيجة ٢ - وأما اذا اعتبرنا المثلث الكروى القائم الزوايا الثلاثة وحيدة للسطوح  
 \* الكروية فمن حيث انه يساوى نصف الشقة القائمة أمكن وضع التناسب السابق على هذه  
 \* الصورة بفرض أن م تدل على المثلث الكروى المذكور

$$\frac{\text{شقة أ}}{\text{م}} = \frac{\text{زاوية أ}}{\text{زاوية قائمة}} \quad \text{أو} \quad \frac{\text{شقة أ}}{\text{م}} = \frac{\text{زاوية أ}}{\text{زاوية قائمة}}$$

- \* أعني أن الشقة تقاس في هذه الحالة بضعف زاويتها

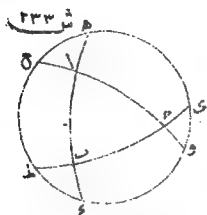
## دعوى نظرية

## فائدة

## دعوى نظرية

\* (٢٧٦) مساحة المثلث الكروي تساوي الفرق بين مجموع زواياه وفاقمتين (يفرض أن  
\* المثلث الكروي القائم الزوايا الثلاثة لسطوح الكروية والزوايا القائمة وحده للزوايا  
\* المستوية) (شكل ٢٣٣)

- \* ليكن  $و$  ح محيط الدائرة العظيمة المعتبر قاعدة نصف الكرة المشتمل على الثلث حيث  
 \* يفرض دائماً وجود الثلث على نصف كرة واحدة فاذامت أضلاع الثلث  $و$  ح و  $ا$   
 \* و  $ا$  ب حتى تلاقي محيط القاعدة فيحصل على مقتضى



الفائدة السابقة أن

$$* \text{ ا ب ح } + \text{ و ح } + \text{ ح ا هـ } = \text{ شقة ا } و$$

$$* \text{ ا ب ح } + \text{ ا ب ط ح } + \text{ و ح } = \text{ شقة ح } و$$

$$* \text{ ا ب ح } + \text{ ا ح و هـ } + \text{ و ح ط } = \text{ شقة ب }$$

\* وبجمع هذه التساويات على بعضها يحدث

$$* \text{ ا ب ح } + \text{ نصف كرة } = \text{ شقة ا } + \text{ شقة ح } + \text{ شقة ب } \text{ أو }$$

$$* \text{ ا ب ح } = \frac{\text{شقة ا } + \text{ شقة ح } + \text{ شقة ب } - \text{ نصف كرة}}{٢}$$

\* غير أن إذا نسبنا تلك السطوح الى الثلث الكروي القائم الزوايا الثلاثة يحدث

$$* \frac{\text{شقة ا } + \text{ شقة ح } + \text{ شقة ب } - \text{ نصف كرة}}{\text{الشقة القائمة}} = \frac{\text{ا ب ح}}{م} \text{ لكن}$$

$$* \frac{\text{شقة ا}}{\text{الشقة القائمة}} = \frac{\text{زاوية ا}}{\text{قائمة}} , \frac{\text{شقة ح}}{\text{الشقة القائمة}} = \frac{\text{زاوية ح}}{\text{قائمة}} و$$

$$* \frac{\text{شقة ب}}{\text{الشقة القائمة}} = \frac{\text{زاوية ب}}{\text{قائمة}} , \frac{\text{نصف كرة}}{\text{الشقة القائمة}} = \frac{\text{قائمة}}{\text{قائمة}}$$

\* فيحدث

$$* \frac{\text{ا ب ح}}{م} = \frac{\text{و ح } + \text{ ح ا } + \text{ ا ب}}{\text{قائمة}} \text{ أو } \text{ا ب ح} = \text{و ح } + \text{ ح ا } + \text{ ا ب} \text{ وهو المطلوب}$$

\* مثال - اذا كانت  $ا = ١٠^\circ$  و  $ب = ٢٠^\circ$  و  $ح = ٣٠^\circ$  فيكون  $ا + ب + ح = ٦٠^\circ$  و  $٢٠^\circ + ٣٠^\circ + ١٠^\circ = ٦٠^\circ$  واذن يكون

$$* \frac{\text{ا ب ح}}{م} = \frac{٣٠^\circ + ٢٠^\circ + ١٠^\circ}{٩٠^\circ} = \frac{١٨٣^\circ}{٥٤٠^\circ} = \frac{١}{٣} \text{ تقريباً أو } \frac{١}{٣} = \frac{\text{ا ب ح}}{م}$$

\* وحين ان  $م = \frac{١}{٨}$  سطح الكرة فيكون  $ا ب ح$  مساوياً الى  $\frac{١}{٨}$  من سطح الكرة



## ذعوى نظرية

- \* (٢٧٧) مساحة أى كثير أضلاع كروى تساوى الفرقين مجموع زواياه وبين قوائم عددها بقدر عدد أضلاعه ناقصاثنين مضروبا فى اثنين (شكل ٢٣٤)
- \* ليكن  $ا ب ح د هـ$  شكلا كثيرا لأضلاع كرويا معلوما فإذا
- \* مررنا بنقطة  $ا$  وبكل واحدة من النقطتين  $د$  و  $ح$  قوس
- \* دائرة عظيمة فإن الشكل يتقسم الى مثلثات كروية عددها
- \* مساو لعدد أضلاعه ناقصاثنين وحيث أن مجموع زوايا المثلثات
- \* مساو لمجموع زوايا الشكل فتكون مساحة المضلع منسوبة
- \* الى المثلث الكروى القائم الزوايا الثلاث مساوية مجموع زواياه ناقصا من القوائم بقدر ضعف
- \* عدداً أضلاعه الأربعة وهو المراد

\* نتيجة ١ - إذا رمزنا بالحرف  $س$  لسطح المضلع الكروى وبالرموز  $ا و ب و ج و د ... الخ$

\* لزواياه وبالرمز  $د$  لعدد أضلاعه فتحصل

$$س = ا + ب + ج + د ... الخ - (د - ٢) = (٢ - د) = ا + ب + ج + د ... الخ - ٢ + ٢ = ٤$$

\* نتيجة ٢ - إذا كان الشكل المعلوم مربعا كرويا وكان  $ا$  رمزاً لأحد رؤس حذ

$$س = ٤ - ا = ٤ - ١ = ٣$$

\* ومن هنا يشاهد أن زاوية المربع الكروى تزيد عن القائمة

## الفصل الرابع

(فى الأقواس المتعامدة)

## ذعوى نظرية

- \* (٢٧٨) أى نقطة مفروضة خارج دائرة عظيمة يمكن أن يمر بها قوس دائرة عظيمة واحد
- \* عودى على الاول لا اثنان (شكل ٢٣٥)
- \* ليكن  $ب ح$  قوس الدائرة العظيمة المعلوم و  $ا$  النقطة المفروضة خارجة عنه

\* برهان الأول - بقاء من مركز الكرة و عمود على مستوى الدائرة العظيمة ب و يمر به  
 \* ونقطة أ مستوي قطع الكرة في الدائرة العظيمة أ  
 \* العمودية على الدائرة العظيمة ب و بذلك قد أمكن انزال  
 \* قوس دائرة عظيمة عمودي على قوس الدائرة العظيمة ب و  
 \* المفروض من نقطة أ



\* برهان الثاني - يقال ان مستوى الدائرة العظيمة العمودي على الدائرة  $\sigma$  يجب أن يشتمل أولاً على القطر العمودي على  $\sigma$  وثانياً على نقطة  $\alpha$  وحيث أنه لا يتأني الا تمرير مستو واحد بهذا المستقيم وهذه النقطة فقد ثبت المطلوب

\* تنبيه - ما ذكرناه من البرهنة هو بفرض أن نقطة  $A$  ليست قطباً للقوس  $BC$  .

## دعوى نظرية

\* (٢٧٩) اذا مَدَّ من نقطة خارج قوس دائرة عظيمة قوس دائرة عظيمة عمودي عليه وعدة أقواس دوائر عظيمة مائلة فانه يحدث

\* أولا - ان العمود أقصر من كل مائل

- \* ثانياً - المائتان اللذان اقترعا عن موقع العمود يبعدين متساويين متساويان
- \* ثالثاً - المائتان اللذان اقترعا عن موقع العمود يبعدين مختلفين أبعدهما أطول
- \* تسهل الرهنة على هذه النظريات وعلى عكسها أيضاً

## دعوى نظرية

\* (٢٨٠) كل نقطة من نقط قوس الدائرة العظيمة العمودي على وسط قوس دائرة عظيمة آخر  
 \* على بعدين متساويين من نهايتي هذا القوس الاخير وكل نقطة خارجة عنه فهي على بعدين  
 \* مختلفين منها

\* وهذه نظرية يسهل البرهنة عليها وعلى عكسها أيضا

\* نتيجة - مستوى قوس الدائرة العظمية المار عوديا على وسط قوس الدائرة العظمية الثاني  
\* يكون عودا على وسط وتر هذا القوس الاخير وذلك لان خط تقاطع مستوى القوسين

- \* المذكورين ينصف هذا الوتر ويكون عمودا عليه وكذا يكون المستوى العمودي بالمذكور
- \* محل النقاط الفراغية المتساوية البعد عن نهايتي هذا الوتر

### دعوى نظرية

- \* (٢٨١) يتساوى المثلثان الكرويان القائم الزاوية اذا وجد فيهما واحد من الشرطين الآتين
- \* أولا - اذا تساوى من أحدهما وتر وضلع لتطيريهما من الثاني
- \* ثانيا - اذا تساوى من أحدهما وتر وزاوية مجاورة له لتطيريهما من الثاني والبرهنة عليهما
- \* مهلة
- \* تنبيه - اذا لم تكن الاجزاء المتساوية في المثلثين موضوعة على ترتيب واحد كانا متماثلين

## الفصل الخامس

### (في الدوائر الصغيرة)

- \* (٢٨٢) ينفع مما تقدم من النظريات أن قوس الدائرة العظيمة على الكرة هو بمثابة المستقيم على المستوى وأن قوس الدائرة الصغيرة عليها هو بمثابة قوس الدائرة عليه غير أن
- \* للدائرة الصغيرة مركزين ونصف قطرين وأنه اذا وصل بين نقطتين من قوس دائرة صغيرة بقوس من دائرة عظيمة فإنه يكون وترا لقوس الدائرة الصغيرة
- \* ولنكتف هنا بذلك بمنطوق بعض نظريات مشابهة لما تقدم ذكرها في الباب الثاني من الجزء الاول دون البرهنة عليها السهولتها فنقول
- \* الاولى - قوس أي دائرة عظيمة لا يقابل أي دائرة صغيرة في أكثر من نقطتين
- \* الثانية - القطر يقسم الدائرة الصغيرة الى قسمين متساويين
- \* الثالثة - كل وتر أصغر من القطر
- \* الرابعة - في دائرة واحدة أو في دوائر متساوية الاقواس المتساوية أوتارها كذلك وبالعكس
- \* الخامسة - في دائرة واحدة أو في دوائر متساوية القوس الأكبر يقابل الوتر الأكبر وبالعكس
- \* السادسة - قطب أي قوس ونصف وتره ونصفه يوجده في مستوى دائرة عظيمة عمودي على الوتر

- \* السابعة - في دائرة صغيرة واحدة أو في دوائر صغيرة متساوية الأوتار المتساوية أبعادها عن المركز متساوية \*
- \* الثامنة - في دائرة صغيرة واحدة أو في دوائر صغيرة متساوية الأوتار المختلفة ان أقربهما من المركز أطول وبالعكس \*
- \* التاسعة - قوس الدائرة العظيمة العمودي على نهاية نصف قطر دائرة صغيرة يكون مماسا لمحيطها \*

### دعوى نظرية

- \* (٢٨٣) إذا اشترك محيطا دائرتين صغيرتين في نقطة خارجة عن الخط الواصل بين مركزيهما فإنه لا بد أن يكون لهما نقطة أخرى مشتركة مماثلة للأولى بالنسبة للخط الواصل بين المركزين (شكل ٢٣٦) \*



- \* ليكونا  $ك$  و  $ك$  مركزي الدائرتين و  $ع$  ب  $ك$  قوس الدائرة العظيمة الواصل بينهما و  $ا$  النقطة المشتركة بين المحيطين خارج  $ع$  ب  $ك$  فإنه يتزل من هذه النقطة قوس الدائرة العظيمة  $اب$  عمودا على  $ع$  ب  $ك$  ثم يمد ويؤخذ عليه البعد  $ب$   $أ$  =  $ب$  فتكون نقطة  $أ$  مماثلة لنقطة  $ا$  \* ثم يوصل  $ع$   $ا$  و  $ع$   $أ$  و  $ك$   $أ$  و  $ك$   $أ$  بأكواس دوائر عظيمة فيجد  $ع$   $ا$  =  $ع$   $أ$  لأن  $ع$  ب عمود على وسط  $ا$   $أ$  وهكذا يكون  $ك$   $ا$  =  $ك$   $أ$  وحينئذ فمحيط الدائرة الذي يمر بنقطة  $ا$  لا بد له أن يمر أيضا بنقطة  $أ$  \*

- \* نتيجة ١ - إذا اشترك محيطا دائرتين صغيرتين في نقطة واحدة أي إذا تماسا فإن نقطة تماسهما توجد على الخط الواصل بين المركزين \*

- \* نتيجة ٢ - الدائرتان الصغيرتان اللتان يشتركان في نقطتين على الخط الواصل بين المركزين يتحدان معا \*

- \* نتيجة ٣ - لا يمكن أن يشترك الدائرتان الصغيرتان في نقطتين تكون احدهما على الخط الواصل بين المركزين وثانيتهما خارجة عنه \*

## دعوى نظرية

- \* (٢٨٤) اذا اشتراك محيطا دائرتين صغيرتين في نقطتين كان الخط الواصل بين مركزيهما عمودا على وسط الوتر المشترك (شكل ٢٣٦)
- \* والبرهنة على ذلك يقال ان النقطتين المذكورتين لا يمكن أن تكونا على الخط الواصل بين المركزين (٢٨٣ نتيجة ٢) وكذا لا يمكن أن تكون احدهما عليه والاخرى خارجة عنه (٢٨٣ نتيجة ٣) وحيث ان كل واحد من مركزي الدائرتين متساوي البعد عن النقطتين المذكورتين فيوجدان اذن على قوس الدائرة العظيمة العمودى على وسط قوس الدائرة العظيمة الواصل بينهما

## الفصل السادس

(في بعض مسائل عملية تطبيقية)

## دعوى عملية

(٢٨٥) المطلوب رسم قوس دائرة عظيمة يمر بنقطتين معلومتين (شكل ٢٣٧)

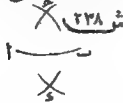


اذا كان النقطتان المعلومتان هما  $A$  و  $B$  فانه يكفي لحل هذه المسئلة ايجاد القطب  $C$  لهاتين النقطتين ولذلك يركز في كل واحدة منهما ونصف قطر مساو لربع محيط دائرة عظيمة يرسم قوسان يتقاطعان في القطب  $C$  ثم يركز في القطب المذكور وبعين نصف القطر يرسم دائرة عظيمة قمر بالنقطتين  $A$  و  $B$  المقروصتين

- \* تنبيه - الدائرتان العظيمتان اللتان مركزاهما  $A$  و  $B$  لابد من تقاطعهما لانما كان البعد المعلوم  $AB$  أقل من نصف دائرة عظيمة فهو أصغر من مجموع نصفي القطرين ولما كان زيادة على ذلك الفرق بين البعدين الآخرين مساويا للصغر فيكون  $AB$  أكبر من فاصلهما واذن فيكون مجموع الأبعاد الثلاثة أقل من محيط دائرة عظيمة

## دعوى علمية

(٢٨٦) المطلوب تنصيف قوس دائرة عظيمة كانت أو صغيرة مرسوم على سطح الكرة  
(شكل ٢٣٨)



حل هذه المسئلة يجب أن يمر قوس الدائرة العظيمة الجامع  
لنقط المتساوية البعد عن نهايتي القوس المعلوم

ولذلك يركز في النقطتين  $a$  و  $b$  ونصف قطر مناسب يرسم قوسا دائرتين يتقاطعا في النقطتين  
 $c$  و  $d$  من نقط المحل المطلوب فاذا أريد الآن تمرير قوس دائرة عظيمة بهاتين النقطتين فإنه  
يجري العمل كما سبق بمرة ٢٨٥

## دعوى علمية

(٢٨٧) المطلوب تمرير من نقطة معلومة على سطح الكرة دائرة عظيمة عمودية على مستوى دائرة  
عظيمة معلومة (شكل ٢٣٩)

أولا - اذا كانت الدائرة العظيمة المعلوم مرسومة بتمامها على سطح الكرة فإنه يركز في نقطة  $a$   
ونصف قطر مساو ربع محيط دائرة عظيمة يرسم قوس دائرة يقطع الدائرة المعلوم في نقطة مثل  $b$   
تكون قطبا للدائرة العظيمة المطلوب تمريرها من نقطة  $a$   
لانه اذا تعامد دائرتان عظيمتان فقطب احدهما يوجد  
ضرورة على محيط الاخرى



ثانيا - اذا لم تكن الدائرة العظيمة المعلوم مرسومة بتمامها فإنه يركز في نقطة  $a$  ونصف قطر  
مناسب يرسم قوس يقطع القوس المعلوم في النقطتين  $b$  و  $c$  المتساوي البعد عن نقطة  $a$   
ثم يمرر بعد ذلك قوس الدائرة العظيمة المنصف للقوس  $b$  و  $c$  كما تقدم بمرة ٢٨٦

## دعوى علمية

(٢٨٨) المطلوب تمرير محيط دائرة على سطح الكرة يمر بثلاث نقط معلومة عليه  $a$  و  $b$  و  $c$   
طريقة ذلك أن ترسم الدائرة العظيمة الجامعة للنقط المتساوية البعد عن النقطتين  $a$  و  $b$  (٢٨٦)  
ثم ترسم أيضا الدائرة العظيمة الجامعة للنقط المتساوية البعد عن النقطتين  $b$  و  $c$  (٢٨٦)  
فيقاطع هاتان الدائرتان في قطب الدائرة  $a$  و  $b$  المطلوب

تنبيه - الدائرة العظيمة الجامعة للنقط المتساوية البعد عن النقطتين  $A$  و  $B$  تمر أيضاً بقطب الدائرة الصغيرة  $A$  و  $B$  ومن ذلك يمكن إيراد هذه النظرية  
إذا أقيم على أواسط أضلاع مثلث كروي دوائر عظيمة عمودية عليها فإنها تتقاطع في نقطة واحدة تكون مركزاً للدائرة المرسومة على المثلث المذكور

### دعوى علمية

(٢٨٩) إذا علمت نقطة خارج قوس دائرة عظيمة والمطلوب تمرير قوس دائرة عظيمة منها بصنع مع الأول زاوية معلومة (شكل ٢٤٠)

والوصول إلى ذلك نفرض أن المسئلة محالة وأن  $A$  هو القوس المطلوب



فإذا ركز في نقطة  $A$  ورسم قوس الدائرة العظيمة  $B$  بنصف قطر مساو ربع محيط دائرة عظيمة وأخذ عليه بعد مساو لقوس الزاوية المطلوبة فتعين بذلك نقطة  $C$  فإذا وصل بينهما وبين نقطة  $A$  بقوس دائرة عظيمة تكون الزاوية  $BAC$  هي الزاوية المطلوبة

### الفصل السابع

(تمرينات)

١ - المعالوم قوس من دائرة عظيمة مرسوم على سطح الكرة والمطلوب تكميل محيط الدائرة العظيمة الذي هو جزء منه

٢ - المطلوب البرهنة على أن نقطتي تماس المستويين المتوازيين المماسين لسطح الكرة هما نهايتا أحد أقطارها

\* ٣ - المطلوب رسم المثلث الكروي إذا علم منه

\* أولاً - أضلاعه الثلاثة

\* ثانياً - زواياه الثلاثة

\* ثالثاً - ضلعان والزاوية المحصورة بينهما

\* رابعاً - ضلع والزاويتان المجاورتان له

## الباب الثالث ( في كثيرى السطوح )

### الفصل الاول ( تعاريف )

(٢٩٠) كثير السطوح هو جسم محاط من جميع جهاته بمضلعات مستوية تسمى أوجهه وأضلاع تلك الاشكال المستوية تسمى أحرفه ورؤسها هي رؤسه وكل حرف من هذه الاحرف يشترك بين وجهين بخلاف الرأس فانها لا تشترك بين أقل من ثلاثة أوجه  
وحينئذ فأجزاء كثير السطوح هي الزوايا المجسمة والزوايا الزوجية والالوجه والاحرف  
وتتأخر كثيرات السطوح عن بعضها بعدد أوجهها فاما كان له أربعة أوجه وهو أثلها عدد يسمى  
هرما ثلاثيا أو ذا الاربعة أوجه وهكذا  
(٢٩١) المنشور هو كثير السطوح المركب من جولة مستويات متقاطعة متنى في مستقيمات  
متوازية ومنتهية بمستويين متوازيين (شكل ٢٤١)

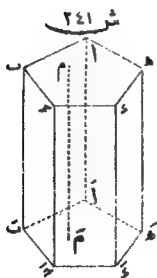
ومن هذا التعريف ينتج

أولا - ان المستقيمت  $ا ا'$  و  $ب ب'$  و ... الخ المتوازية  
المحصورة بين مستويين متوازيين متساوية

ثانيا - ان الاحرف  $ا ب$  و  $ب ج$  و  $ج د$  و ... الخ  
هي متساوية وموازية على التناظر للاحرف  $ا ب'$  و  $ب ج'$  و  
 $ج د'$  و ... الخ

وبناء عليه يكون الشكلان  $ا ب ج د هـ$  و  $ا ب ج د هـ'$   
متساويين لتساوى الاضلاع والزوايا المتناظرة فيهما ويسميان  
قاعدتي المنشور

المستقيم  $م م'$  الذى يقدر به البعد الكائن بين القاعدتين يسمى ارتفاع المنشور





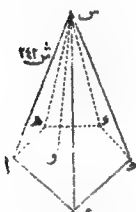
المنشور يكون قائماً أو مائلاً على حسب ما تكون أحرافه الجانبية عمودية أو مائلة على مستويي القاعدةين غير أن المنشور القائم تكون فيه الاشكال المتوازية الاضلاع الجانبية مستطيلات ويكون أحد أحرافه ارتفاعه

(٢٩٢) متوازي السطوح هو منشور قاعدته شكلان متوازي الاضلاع فانما كان قائماً وقاعدته مستطيلتين فإنه يسمى بمتوازي المستطيلات

(٢٩٣) المكعب هو متوازي مستطيلات قاعدته شكل مربع وارتفاعه مساوٍ لأحد أحراف قاعدته ومن هذا التعريف ينتج أن أوجه المكعب هي مربعات متساوية

(٢٩٤) الهرم هو جسم محدود بمضلع مستو  $أ ب ح د ه$  وبجملته مثلثات قواعد الاضلاع المختلفة لهذا المضلع ورؤسها تتجمع في نقطة واحدة  $س$  خارج المضلع المذكور (شكل ٢٤٢)

وتسمى نقطة  $س$  برأس الهرم وأما المضلع  $أ ب ح د ه$  فيسمى قاعدته والعمود  $س و$  النازل من رأسه إلى قاعدته يسمى ارتفاعه الهرم وتتمايز الاهرامات عن بعضها بعدد أوجهها المحيطة بالرأس أو بعدد اضلاع شكل قاعدته فإ كانت قاعدته مثلثاً يسمى هرم ثلاثياً وما كانت قاعدته شكلارباعياً يسمى هرمارباعياً وهكذا الهرم المنتظم ما كانت قاعدته شكلاً منتظماً وكان مركزها موقع العمود النازل من رأسه عليها



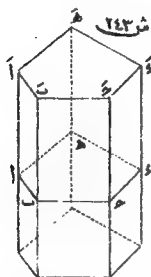
(٢٩٥) كثيرالسطوح المخدب هو الذي يوجد بتملحه في إحدى جهتي امتداد أي وجه من أوجهه ولم تكمل هنا الا على كثيرات السطوح المخدبة وينتج من تعريف الشكل المخدب أن المستقيم لا يمكن أن يقطعه في أكثر من نقطتين

## الفصل الثاني

(في المبادئ)

### دعوى نظرية

(٢٩٦) اذا قطع المنشور بمستويات متوازية فان القطاعات الحادثة تكون مضلعات مستوية متساوية (شكل ٢٤٣)

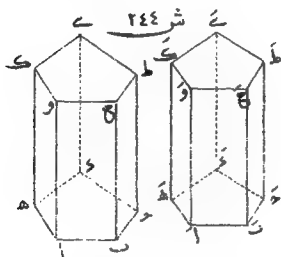


إذا كان المستويان القاطعان هما  $أ ب ح د هـ$  و  $أ ب ح د هـ$  فالمتعينان  $أ ب$  و  $أ ب$  يكونان متوازيين لأنهما خطا تقاطع مستويين متوازيين بمستو ثالث وحيث أنهما محصوران بين مستويين متوازيين فيكونان متساويين أيضا وبناء عليه فكثيرا الاضلاع  $أ ب ح د هـ$  و  $أ ب ح د هـ$  متساويان لتساوي أضلاعهما وزواياهما المتناظرة الموضوعة على ترتيب واحد

### دعوى نظرية

(٢٩٧) يتساوى المنشوران إذا تساوى من أحدهما الأوجه الثلاثة المركبة لأحدى زواياه المجسمة لنظائرهما من الثاني وكانت موضوعة

على ترتيب واحد (شكل ٢٤٤)



إذا كانت الأوجه الثلاثة المركبة للجسمين الثلاثيين  $أ$  و  $أ$  متساوية وكانت موضوعة على ترتيب واحد بأن كان

$أ ب ح د هـ = أ ب ح د هـ$  و  $أ ب ح د هـ = أ ب ح د هـ$   
فأنا نبرهن على إمكان انطباق أحد الجسمين على الآخر انطباقا تاما

ولذلك نضع المنشور الثاني على الأول بأن نطبق القاعدة  $أ ب ح د هـ$  على مساويتها وحيث أن الجسمين  $أ$  و  $أ$  متساويان (٢٤٠ ثالثا) فيأخذ الحرف  $أ$  و الاتجاه  $أ$  و حيث أنهما متساويان فتقع نقطة  $و$  على نقطة  $و$

وبعد انطباق  $أ$  و على  $أ$  و تنطبق باقي أحرف المنشور الثاني  $ب ح د هـ$  و  $ط ق ك ل م$  ... الخ على نظائرها من الأول وبذلك ينطبق المنشوران على بعضهما ويتساويان

نتيجة - إذا كان المنشوران قائمين فانه يكفي في تساويهما حصول التساوي بين قاعدتيهما وارتفاعيهما لأن ذلك كافٍ لانطباق أحد المنشورين على الثاني

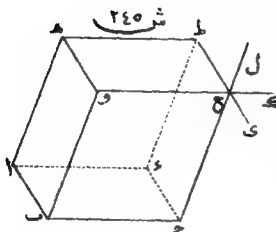
## دعوى نظرية

(٢٩٨) كل متوازي سطوح يكون فيه

أولا - الأوجه المتقابلة متساوية ومتوازية

ثانيا - الزوايا الزوجية المتقابلة متساوية

ثالثا - الزوايا المجسمة الثلاثية المتقابلة متماثلة (شكل ٢٤٥)

برهان الاول يقال - أما القاعدتان  $أ ب ح د$ و  $ه و ط$  فهما على مقتضى تعريف متوازي

السطوح متساويتان ومتوازيتان وأما الوجهان

 $أ ب و ه$  و  $د ح ط$  فقيسما الضلعان $أ ب$  و  $د ح$  متساويان ومتوازيان لانهما

ضلعان متقابلان من الشكل المتوازي الاضلاع

 $أ ب ح د$  والضلعان  $ب و$  و  $ح د$  كذلكلانهما من متوازي الاضلاع  $ب و ح د$  والضلعان $ه و$  و  $ط$  كذلك أيضا لانهما من متوازي الاضلاع  $ه و ط$  وبناء عليه فيكونانمتوازيين ومتساويين وبمثل ذلك يبرهن على توازي وتساوي الوجهين  $ب ح و د$  و  $أ د ط ه$ برهان الثاني يقال - أما الزوجيتان  $أ ب$  و  $ط$  فهما متساويتان لانا لומרنا مستويا

عموديا على حرفيهما فانه يقطع وجهي كل واحدة منهما في مستقيمين يتكون بينهما زاويتها

المستوية وتوازي اضلاع الزاويتين المستويتين المذكورتين ومضادتهما في الجهة تكونان

متساويتين وبمثل ذلك يبرهن على تساوي باقي الزوجيات

برهان الثالث يقال - ان المجسمتين الثلاثيتين  $أ و ح$  نجد انهما من كبتان من اجزاءمتساوية غير انهما موضوعة على ترتيب منعكس لانا لو مددنا أحرف المجسمة  $ح$  على استقامتهافانه تشكل منها زاوية مجسمة مساوية للمجسمة  $أ$  لتركبهما من اجزاء متساوية موضوعة على

ترتيب واحد

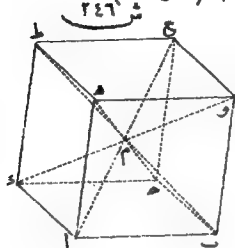
نتيجة - يمكن اعتبار أي وجهين متقابلين من متوازي السطوح كأنهما قاعدتان له

تنبيه - في الحالة ان خصوصية التي يكون فيها متوازي السطوح قائما يكون في كل واحد من

المجسمتين  $أ و ح$  زاويتان مستويتان قائمتان وبذلك يمكن انطباقهما على بعضهما

## دعوى نظرية

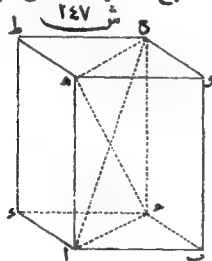
(٢٩٩) أقطار متوازي السطوح الاربعة تنصف بعضها (شكل ٢٤٦)



ليكن  $AB$  و  $CD$  و  $EH$  و  $FG$  متوازي السطوح  
المعلوم فإذا اعتبرنا القطرين  $AC$  و  $BD$  ووصلنا  
 $CE$  و  $AD$  نرى أن الشكل  $ACEH$  متوازي  
أضلاع لأن الضلعين  $AE$  و  $CH$  متوازيان  
ومتساويان وحينئذ فقطراه ينصفان بعضهما  
وبمثل ذلك يبرهن على باقي الاقطار

تنبيه ١ - نقطة تقابل الاقطار تسمى أحيانا  
مركز متوازي السطوح

تنبيه ٢ - أقطار متوازي المستطيلات متساوية ومربع أحدها يساوي مجموع مربعات  
الاحرف الثلاثة المجتمة معه في احدى الرأسين  
الواصل هو بينهما (شكل ٢٤٧)



برهان الاول - اذا اعتبرنا القطرين  $AC$  و  $BD$   
نجد أنهم متساويان لأن الشكل  $ACEH$  متوازي  
مستطيل

برهان الثاني - يؤخذ من المثلث القائم الزاوية  
 $ACE$  أن

$$\overline{AC}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{CE}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{CD}^2 = \overline{AH}^2 + \overline{CH}^2$$

لكن  $\overline{AC}^2$  من المثلث القائم الزاوية  $ABD$  مساو  $\overline{AB}^2 + \overline{BD}^2$  أو مساو  $\overline{AB}^2 + \overline{AS}^2$   
وإذن يكون

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AS}^2 + \overline{AD}^2 \text{ وهو المراد}$$

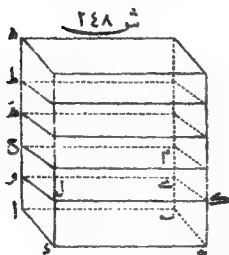
## الفصل الثالث

(في قياس حجم متوازي السطوح)

(٣٠٠) إذا اعتبرنا حجم المكعب المنشأ على وحدة الأطوال وحدة الابعاد فيكون حجم أي كثير مسطوح هو النسبة الكائنة بين حجمه وحجم ذلك المكعب المعتبر وحدة

### دعوى نظرية

(٣٠١) النسبة بين متوازي المستطيلات المتحدين في القاعدة كالنسبة بين ارتفاعيهما (شكل ٢٤٨)



انفرض ألا وجود مقياس مشترك بين الارتفاعين

أهـ و أهـ بحيث يكون مثلا  $\frac{أهـ}{أهـ} = \frac{ب}{ب}$

فإذا تصورنا رؤس ومستويات موازية للقاعدة من

نقط تقاسم الارتفاعين فإن متوازي المستطيلات

الأول ينقسم إلى خمسة متوازيات المستطيلات

متساوية لا تحادها في القاعدة والارتفاع وأما

الثاني فإنه ينقسم إلى ثلاثة فقط متساوية أيضا

وحيث إذا رمز بالرمزين ع و ع لجسمين نحصل  $\frac{ع}{ع} = \frac{ب}{ب}$

ومن هذا التناسب السابق يحدث

$$\frac{ع}{ع} = \frac{أهـ}{أهـ} = \frac{ع}{ع}$$

بفرض أن ع و ع يدلان على الارتفاعين

وأما إذا لم يوجد بين الارتفاعين مقياس مشترك فإنه يبرهن كما سبق (بمعة ٨٠ جزء أول) على أن

النسبة بين حجمي الجسمين المذكورين على أي حالة كانت هي كالنسبة بين ارتفاعيهما

تتبعه - يطلق على الأحراف الثلاثة الخارجة من رأس واحدة من رؤس متوازي المستطيلات

اسم أبعاد الجسم ومتى علمت هذه الأبعاد فإن متوازي المستطيلات يتعين تعيينها

وحيث قد علم مما تقدم أنه يمكن اعتبار قاعدة الجسم للذ كورأى وجهه من أوجهه أمكن التعبير

عن منطوق النظرية السابقة بهذه العبارة الآتية

النسبة بين متوازي المستطيلات المتحدين في بعدين من أبعادهما الثلاثة كالنسبة بين بعديهما

الثالثين

## دعوى نظرية

(٣٠٢) النسبة بين متوازي المستطيلات المتحدین فی الارتضاع كالنسبة بین قاعدتهما إذا كان متوازي المستطيلات المعالومان هما  $ح$  و  $ع$  وأبعاد الاول هي  $ا$  و  $ب$  و  $ح$  وأبعاد الثاني هي  $ا$  و  $ب$  و  $ح$  واعتبرنا الوجهين  $ا ب$  و  $ا ب$  قاعدتين لهما فيكون ارتفاعهما المشترك  $ح$

ثم إذا اعتبرنا متوازي مستطيلات ثالث  $ع$  وأبعاده  $ا$  و  $ب$  و  $ح$  وقارناه بمتوازي المستطيلات السابقين نحصل على مقتضى النظرية السابقة أن

$$\frac{ع}{ب} = \frac{ع}{ب} \text{ و } \frac{ا}{ب} = \frac{ا}{ب} \text{ أو } \frac{ع}{ب} \times \frac{ا}{ب} = \frac{ع}{ب}$$

وقد علم في الباب الاول من الجزء الثاني أن الحاصل  $\frac{ا}{ب} \times \frac{ع}{ب}$  يدل على النسبة الكائنة بين مستطيلين بعدا أحدهما  $ا$  و  $ب$  وبعدا الثاني  $ا$  و  $ب$  فإذا رمزنا لهذين السطحين بالرمزين  $و$  و  $ق$  أمكن أن يكتب  $\frac{ع}{ب} = \frac{ق}{و}$  وهو المراد

نتيجة - إذا فرضنا تقدير الأبعاد  $ا$  و  $ب$  و  $ح$  و  $ا$  و  $ب$  و  $ح$  بأعداد كان  $\frac{ا}{ب} = \frac{ق}{و} \times \frac{ع}{ب}$  وحينئذ فيمكن التعبير عن منطوق النظرية المتقدمة بالطريقة الآتية النسبة بين متوازي المستطيلات المتحدین فی بعد واحد كالنسبة بين حاصل ضرب بعدهما الآخرین

## دعوى نظرية

(٣٠٣) النسبة بين أي متوازي المستطيلات كالنسبة بين حاصل ضرب قاعدة الاول في ارتفاعه إلى حاصل ضرب قاعدة الثاني في ارتفاعه

فإذا كان  $ح$  و  $ع$  متوازي المستطيلات المعالومين وأبعاد الاول هي  $ا$  و  $ب$  و  $ح$  وأبعاد الثاني هي  $ا$  و  $ب$  و  $ح$  وفرض متوازي مستطيلات ثالث  $ع$  وأبعاده  $ا$  و  $ب$  و  $ح$  وقارناه بكل واحد من المعالومين فإنه يتحصل على مقتضى النظريتين السابقتين هذان التماسان

$$\frac{ع}{ح} = \frac{ع}{ح} \text{ و } \frac{ا}{ب} \times \frac{ع}{ب} = \frac{ع}{ح} \text{ أو } \frac{ا}{ب} \times \frac{ع}{ب} \times \frac{ب}{ع} = \frac{ع}{ح}$$

ثم إذا فرض تقويم الأبعاد بأعداد أمكن أن يكتب  $\frac{ا}{ب} \times \frac{ع}{ب} = \frac{ع}{ح}$

نتيجة - اذا فرض أن ح هو المكعب المختار و حدة الاجسام فتكون أبعاده أ و ب و ح

$$\text{وحدة الاطوال المرموز له بحرف ل} \text{ وحينئذ يكون } \frac{ع}{ح} = \frac{ا}{ب} \times \frac{ب}{ل} \times \frac{ل}{ح}$$

وحيث ان المقادير  $\frac{ع}{ح}$  و  $\frac{ا}{ب}$  و  $\frac{ب}{ل}$  تدل على مقاس الكيات ح و ا و ب و ح  
أمكن أن يقال لقياس حجم متوازي المستطيلات بضرب مقاسات أبعاده الثلاثة ببعضها

ومن جهة أخرى حيث ان الحاصل  $\frac{ا}{ب} \times \frac{ب}{ل}$  يدل على مقاس القاعدة ( ا و ب ) أمكن  
أن يقال أيضا لقياس حجم متوازي المستطيلات بضرب مقاس قاعدته في مقاس ارتفاعه

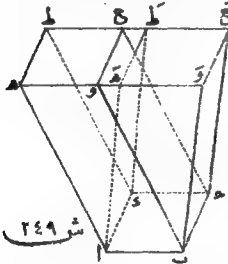
تنبيه - يجب أن يتذكر دائماً أن منطوق هذه النظرية يقضى أن يكون وحدة السطوح هو  
المربع المتشأ على وحدة الاطوال و وحدة الاجسام هو المكعب المتشأ على وحدة الاطوال

### دعوى نظرية

(٣٠٤) متوازي السطوح المتصان في قاعدة واحدة وقاعدتهما الاخرى ان في مستو واحد

ومحسوران بين مستقيمين متوازيين يكونان

متكافئين (شكل ٢٤٩)



ليكن ا ب ح د هو ح ط و ا ب ح د هو ح ط و ا ب ح د هو ح ط

متوازي السطوح المتصان في القاعدة

السفلى ا ب ح د وقاعدتهما العلويان

ه و ح ط و ه و ح ط في مستو واحد

ومحسوران بين المستقيمين المتوازيين ه و ح ط

ط ح نعتبر في الشكل الكلى المنشورين الثلاثين

ه ا ه ط ح ط و و ح ح ح ح فيشاهد فيهما أن الجسمتين الثلاثيتين ه و و محاطتان

بثلاثة أوجه متساوية النظرية لنظيره وموضوعة على ترتيب واحد

وبيانها المثلث ه ا ه = المثلث و و ح و تساوى ووازي أضلاعهما المتناظرة

والوجه ه ا ط = الوجه و و ح لكونهما وجهين متقابلين من متوازي سطوح واحد

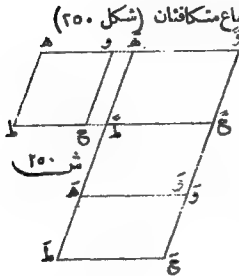
والوجه ه ه ط ط = الوجه و و ح لاشتراكهما في الجزء ه و ح ط و لتساوى الجزأين

الباقين منهما القاعدة المشتركة ا ب ح وحينئذ فالمنشوران الثلاثيان المذكوران متكافئان

لكنه اذا طرحنا من الشكل الكلى المنشور الثلاثي الاول كل الباقي هو متوازي السطوح الثاني

واذا طرحنا المنشور الثاني كان الباقي هو متوازي السطوح الاول وبناء عليه فتوازي السطوح متكافئان

### دعوى نظرية



(٢٥٠) متوازي السطوح المحدان في القاعدة والارتفاع متكافئان (شكل ٢٥٠)  
حيث قد فرض اتحاد متوازي السطوح  $ع$  و  $ح$   
في القاعدة السفلى  $أ ب د$  وفي الارتفاع  
فتكون قاعدتاها  $أ ب د$  والعليان ضرورة في مستو  
واحد مواز للقاعدة  $أ ب د$  فان كانتا مع ذلك  
محصولتين مستقيمتين متوازيين ثبت المطلوب  
(٢٥٤) والافتد  $هـ و و$  و  $ع ط و$  و  $هـ ط و$   
و  $ح$  فتشكل من ذلك شكل متوازي الاضلاع  
 $هـ و ع ط$  مساو ومواز للقاعدة  $أ ب د$   
وذلك لانه حيث كان  $هـ و$  مساويا و موازيا  $هـ و$  فيكون مساويا وموازيا  $أ ب$  وكذلك  
حيث كان  $هـ ط$  مساويا وموازيا  $هـ ط$  فيكون مساويا وموازيا  $أ د$   
وحيث يمكن اعتبار  $هـ و ع ط$  كانه قاعدة علوية لمتوازي سطوح ثالث  $ع$  مشترك  
مع الاولين في القاعدة السفلى  $أ ب د$

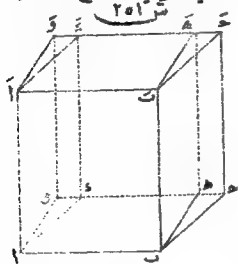
وانا فاننا متوازي السطوح الاخير  $ع$  بكل واحد من متوازي السطوح  $ع$  و  $ح$  نشاهد  
على مقتضى النظرية السابقة انه يكافئ كل واحد منهما واذن فهما متكافئان  
نتيجة - كل متوازي سطوح مائل يمكن تحويله الى آخر قائم يكافئه متقدمه في القاعدة  
والارتفاع وذلك لانه اذا اقيمت من رؤس القاعدة السفلى اعمدة عليها ومدت حتى تلاقي مستوى  
القاعدة العليا فانه يشكل من ذلك متوازي سطوح قائم متقدم الاول في القاعدة والارتفاع  
وبناء على النظرية السابقة يكون متكافئا للاول

### دعوى نظرية

(٢٥٦) كل متوازي سطوح قائم يمكن تحويله الى متوازي مستطيلات يكافئه متقدمه  
في الارتفاع وقاعدتاها متكافئتان (شكل ٢٥٦) ليكن  $أ ب د$  و  $أ ب د$  و  $د$  متوازي



السطوح القائم فعلى مقتضى الفرض تكون قاعدته شكلين متوازي الاضلاع وأما أوجهه فهي مستطيلات



فاذا اعتبرنا الوجهين المتقابلين  $AB$  و  $CD$   $CD$  من متوازي السطوح قاعدتين له وأقيم من النقط  $A$  و  $B$  و  $A'$  و  $B'$  أعمدة على القاعدة  $AB$  فتختصر هذه الأعمدة بين مستويي القاعدتين وتكون أعمدة على الحرفين  $AB$  و  $A'B'$  ثم اذا وصل  $DD'$  و  $CC'$  فإنه يتكون متوازي مستطيلات يكافئ متوازي

السطوح القائم (٣٠٤)

ونشاهد غير ذلك أن القاعدة  $AB$  قد استعوضت بالمستطيل  $AB$  هو المكافئ لها وأما الارتفاع  $AA'$  فهو باق على حاله وبذلك ثبت المطلوب

نتيجة - ينتج عما ذكر أن مساحة متوازي السطوح تساوى حاصل ضرب مقاس قاعدته في مقاس ارتفاعه لانه يكافئ متوازي المستطيلات المتضمنه في القاعدة والارتفاع

تنبيه - من المعلوم أن المساحة الصطحية الجانبية لمتوازي سطوح معلوم عبارة عن مجموع مساحات الواجه الجانبية له وحيث ان كل وجهين متقابلين فيهما متساويان فيؤخذ اذن ضعف مساحة وجهين متجاورين منه ويضمن الى بعضهما

فاذا دل  $A$  و  $B$  على ضاعين متجاورين من قاعدته و  $C$  و  $C'$  على ارتفاعي المستطيلين المتجاورين المشتملين عليهما و  $S$  على المساحة الجانبية تحصل

$$S = 2(A + B)C$$

واذا أريد ضم مساحتي القاعدتين العليا والسفلى الى هذه المساحة وفرض أن  $S$  يدل على ارتفاع القاعدة حدث

المساحة الصطحية الكلية  $S = 2(A + B)C + 2AC = 2C(A + B + A)$  أما في حالة ما يكون الجسم متوازي سطوح قائما فان  $C$  و  $C'$  يكونان متساويين العرف

الثالث و يؤل القانونان المتقدمان الى

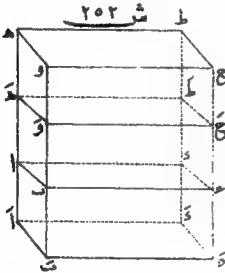
$$S = 2(A + B)C \times C \text{ والمساحة الصطحية الكلية } = 2C(A + B + A)$$

وفي حالة ما يكون الجسم متوازي مستطيلات فإن  $د$  يكون مساويا  $ب$  وتكون المساحة السطحية الكلية مساوية الى  $٢(ا + ب + د)$

## الفصل الرابع (في قياس المنشور)

### دعوى نظرية

(٣٠٧) أى منشور يكافئ منشورا قائما تكون قاعدته القطع العمودى على أحره وارتفاعه يكون مساويا طول أحره (شكل ٢٥٢)



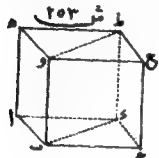
ليكن  $ا ب د$  هو  $ع ط$  المنشور المعام فاذ  
مد من نقطة  $هـ$  احدى نقط الحرف  $ا هـ$   
مستو عمودى عليه فيكون عمودا ضرورة على جميع  
الاحرف ويحدد على المنشور القطع العمودى  
 $هـ و ع ط$  ثم اذا أخذ بعنك  $هـ ا$  =  $هـ ا$   
ومد من نقطة  $ا$  قطع آخر عمودى  $ا ب د$   $د$   
فان الجسم المحصور بين هذين القطعين العمودين  
يكون منشورا (٢٩١)

وللبرهنة على تكافؤ المنشورين  $ا ب د$  و  $ع ط و ا ب د$   $د$   $هـ و ع ط$  يقارن الجزء  
المنشورى  $ا ب د$   $د$   $ا ب د$  بالجزء المنشورى  $هـ و ع ط$  ففى حيث ان القاعدتين  
 $ا ب د$   $د$  و  $هـ و ع ط$  متساويتان فانه يمكن وضع احدهما على الاخرى وانطبقهما على  
بعضهما وحيث كان  $ا ا$  عمودا على القطع العمودى فيأخذ بعد الانطباق الاتجاه  $هـ هـ$   
وحيث ان  $ا هـ$  =  $ا هـ$  يكون  $ا ا$  =  $هـ هـ$  وبذلك تقع نقطة  $ا$  على نقطة  $هـ$  وبمثل  
ذلك يبرهن على انطباق باقى النقط  $ب$  و  $د$  على النقط  $هـ و ع ط$  وحيث ان يكون  
جرا المنشورين متساويين

فاذا طرح على التوالى كل واحد من جزأى المنشورين المذكورين من الجسم الكلى فان الباقيين  
الناجين وهما المنشور المائل والمنشور القائم يكونان متكافئين وهو المطلوب

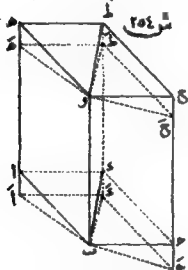
## دعوى نظرية

(٢٠٨) المستوى المار بمجرفين متقابلين من متوازي السطوح يقسمه الى منشورين ثلاثيين متكافئين



أولاً - إذا كان متوازي السطوح قائماً مثل  $أ ب ح د ه و ط$  (شكل ٢٠٣) فإنه يسهل البرهنة على تكافؤ المنشورين الثلاثين  $أ ب د ه و ط$  و  $و ب ح ط و د$  القائم المنقسم اليهما بالمستوى  $ط و د$  وذلك لاتحادهما في الارتفاع  $ح د$  ولتساوي قاعدتيهما لكان انطباقهما على بعضهما بعد الدوران

ثانياً - إذا كان متوازي السطوح المعلوم ماثل مثل  $أ ب ح د ه و ط$  (شكل ٢٠٤) فلنأخذ من  $د$  البرهنة على تكافؤ المنشورين الثلاثين  $أ ب د ه و ط$  و  $و ب ح ط و د$  المنقسم اليهما بمتوازي السطوح بواسطة التطبيق كما في الحالة الأولى غير أننا نبرهن على التكافؤ بالطريقة الآتية



نمرر بالنقطتين  $ب و$  ومستويين عموديين على الحرف  $ب و$  فيكونان عموديين على جميع أحرف متوازي السطوح ويقطعاها في النقط  $أ و د و ح و ه و ط و ع$  وحيث أن الأوجه المتقابلة من متوازي السطوح

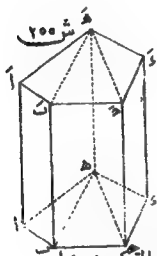
متوازية يكون  $أ د$  موازياً  $ب ح$  و  $أ ب$  موازياً  $ح د$  و  $د ه$  موازياً  $ع ط$  و  $و ع$  موازياً  $ه ط$  وأذن فيكون القطعان شكلين متوازيين للأضلاع ومنلهما باقي الأوجه وحيث أنهما عمودان على الحرف  $ب و$  فيكونان متوازيين وعلى مقتضى ماقرر (بمزة ٢٩٦) يكونان متساويين وبناء عليه يكون الجسم الحادث منشوراً وهو قائم لكون الحرف  $ب و$  عموداً على مستوى القاعدة

إذا قررهذا ولا حظنا ما ذكر (بمزة ٢٠٧) من أن أي منشور يكافئ منشوراً قائماً قاعدته القطع العمودي على أحرفه وارتفاعه طول حرفه نجدهم جهة أن المنشور  $أ ب ح د ه و ط$  يكافئ المنشور القائم  $أ ب ح د ه و ط$  ومن جهة أخرى أن كل واحد من المنشورين الثلاثين  $أ ب د ه و ط$  و  $و ب ح ط و د$  يكافئ المنشور القائم الثلاثي المناظر له وحيث أن المنشورين الثلاثين القائمين متكافئان كما ذكرنا أولاً فيكون المثلان كذلك وهو المطلوب

نتيجة ١ - مساحة المنشور الثلاثي تساوي حاصل ضرب مقاس قاعدته في مقاس ارتفاعه وذلك لأنه لما كان متوازي السطوح يتركب من منشورين ثلاثين متكافئين متحدين معه في الارتفاع ومجموع قاعدتهم مساو لقاعدته كانت مساحة أيهما تساوي نصف مساحة متوازي السطوح فإذا دلت  $u$  على قاعدة المنشور الثلاثي ودل  $e$  على ارتفاعه تكون مساحة متوازي السطوح مساوية  $u \times e$  وتكون مساحة المنشور الثلاثي مساوية إلى

$$\frac{1}{3} u \times e = e \times u$$

نتيجة ٢ - مساحة أي منشور تساوي حاصل ضرب قاعدته في ارتفاعه (شكل ٢٥٥) وذلك لأنه يمكن تقسيمه بواسطة المستويات القطرية  $هـ د هـ$  و  $هـ ب هـ$  إلى منشورات ثلاثية متحدة معه في الارتفاع وحيث أن مساحة كل واحد منها تساوي حاصل ضرب قاعدته في ارتفاعه وأن مجموع قواعدها عبارة عن قاعدة المنشور فيكون مجموع هذه المساحات أو المساحة المطلوبة مساوية حاصل ضرب قاعدة المنشور في ارتفاعه



نتيجة ٣ - ويمكن أخذ مساحة المنشور أيضا بواسطة ضرب طول حرفه في القطع العمودي عليه كما في غمرة (٢٥٥)

تنبيه - المساحة السطحية الجانبية للمنشور تساوي مجموع مساحات أوجهه المتركب هومنها وفي حالة ما نطلب المساحة السطحية الكلية للمنشور فإنه يضم إلى ما سبق مساحة القاعدتين

## الفصل الخامس

(في قياس الهرم)

### دعوى نظرية

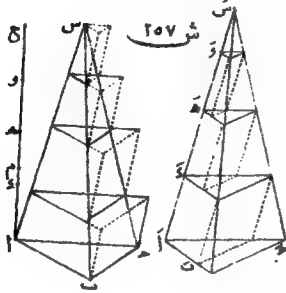
(٢٥٩) إذا قطع الهرم بمستوا مواز لقاعدته فإن أرففه وارتفاعه تنقسم إلى أجزاء متناسبة

ويكون شكل القطع مشابها للقاعدة (شكل ٢٥٦)

إذا كان  $س أ ب د هـ$  هرماتما و  $أ ب د$   $د هـ$  قطعاً موازياً لقاعدته و  $س د$  و  $س د$  ارتفاعي الهرمين الكلي والاصغر وتصور غير مستوي بالحرف  $س أ$  وبالارتفاع  $س د$  فإنه يقطع القاعدة والقطع في المستقيمين  $أ د$  و  $أ و$  التوازيين ثم إذا اخطنا بصل ذلك



الى اجزاء متساوية بحيث يكون كل جزء منها أقل من  $\frac{1}{4}$  م ونعلم نقطة التقاسيم مستويات موازية لمستوى القاعدتين فتكون القطاعات الحادثة متكافئة (٣٠٩ نتيجة ٢)



ثم اذا اعتبرنا كلًا من قاعدة الهرم الاول وقطاعه قواعد وأنشأنا عليها مناسير ثلاثية خارجة فإنه يتشكل على الهرم المذكور أربع مناسير ثلاثية متحدة في الارتفاع ومجموعها يكون أكبر منه ضرورة وكذا اذا اعتبرنا قطاعات الهرم الثاني دون قاعدته كأنها قواعد وأنشأنا عليها مناسير ثلاثية داخلية فإنه يتشكل داخل الهرم

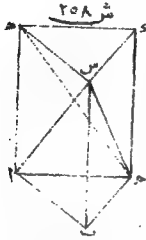
المذكور ثلاث مناسير ثلاثية متحدة في الارتفاع ومجموعها أقل منه

وبناء على ما ذكر يكون الفرق بين مجموع المناسير في الهرم الثاني وبين مجموعها في الاول أكبر بكثير من الفرق بين الهرمين ولتأملنا في الشكل نرى أن المنشور الثاني من الهرم الاول يكافئ المنشور الاول من الهرم الثاني لتكافئ قاعدتيهما واتحادهما في الارتفاع وكذا نرى أن الثالث من الهرم الاول يكافئ الثاني من الهرم الثاني والرابع يكافئ الثالث وحينئذ يكون الفرق بين المناسير في الهرمين منشورًا ثلاثيًا قاعدته  $AB$  وارتفاعه  $AD$  وهو أصغر من المنشور الذي قاعدته  $AB$  وارتفاعه  $AM$  الذي اعتبره فرقًا بين الهرمين لكنه يؤخذ مما سبق تقريره أن المنشور الذي قاعدته  $AB$  وارتفاعه  $AD$  يجب أن يكون أكبر بكثير من المنشور الذي قاعدته  $AB$  وارتفاعه  $AM$  وهو محال وبناء عليه فلا يكون للفرض الذي افترضنا عليه تلك النتيجة محلا أعني أنه لا يمكن أن يكون الهرم  $SAB$  أكبر من الهرم  $SAC$  وبمثل ذلك يبرهن على أن الثاني لا يمكن أن يكون أكبر من الاول فيكونان إذن متكافئين وهو المراد

### دعوى نظرية

(٣١١) الهرم الثلاثي هو ثلث المنشور الثلاثي المتحدده في القاعدة وفي الارتفاع (شكل ٢٥٨) اذا كان  $SAB$  هرمًا ثلاثيًا معلومًا و  $M$  نقطة  $SB$  مستوية مع قاعدته  $AB$  ومن نقطتي  $A$  و  $C$  مستقيمان موازيان للحرف  $SB$  ومتداعلي استقامتهما حتى يتلاقيا

مع المستوى  $س د ه$  فانه يتشكل من ذلك منشور ثلاثي متضمن الهرم المعلوم في القاعدة وفي الارتفاع ويطلب البرهنة على أنه يتركب من ثلاثة اهرامات



ثلاثية كل واحد منها يكافئ الهرم المعلوم  $س ا ب$  ذلك يقال اذا تصورنا حذف الهرم المعلوم من المنشور الثلاثي فان الباقي يكون هرمًا رباعيًا رأسه  $س$  وقاعدته متوازي الاضلاع  $ا د ه$  فاذا مررنا المستوى  $س د ه$  فان الهرم الرباعي ينقسم الى هرمين ثلاثيين متشابهين في الارتفاع ومتساويين في القاعدة فيكونان متكافئين واذن فلم يبق سوى البرهنة على أن أحد هذين الهرمين يكافئ الهرم المعلوم

وللوصول الى ذلك يقال ان الهرم  $س د ه$  يمكن اعتبار رأسه  $د$  وقاعدته  $س ر ه$  وحيث ان المثلث  $س د ه = ا ب$  فيكون الهرمان متكافئين لاتحادهما أيضا في الارتفاع

نتيجة ١ - ينتج مما ذكر أن مساحة الهرم الثلاثي تساوي ثلث مساحة حاصل ضرب قاعدته في ارتفاعه فاذا كانت قاعدته  $ق$  وارتفاعه  $ع$  تكون مساحته مساوية الى  $\frac{1}{3} ق \times ع$  نتيجة ٢ - حيث ان أي هرم يمكن تقسيمه الى اهرامات ثلاثية بواسطة المستويات التي تمر برأسه وبأقطار قاعدته الخارجية من رأس واحد منها وأن مساحة كل واحد من هذه الاهرامات الثلاثية تساوي ثلث حاصل ضرب قاعدته في ارتفاعه فيكون مجموعها أي مساحة الهرم الكلي مساوية لثلث حاصل ضرب مجموع قواعدها في ارتفاعها المشترك بينها وحيث ان هذه الاهرامات متحدة مع الهرم الاصل في الارتفاع وان مجموع قواعدها يدل على قاعدة الهرم المذكور فتكون مساحته تساوي ثلث حاصل ضرب قاعدته في ارتفاعه

نتيجة ٣ - يستفاد مما تقدم أن أي هرم يمكن اعتباره كأنه ثلث المنشور المتضمنه في القاعدة وفي الارتفاع

تنبيه - المساحة السطحية الجانبية للهرم هي مجموع مساح أوجهه المركب هو منها واضم الى ذلك اذا اقتضى الحال مساحة القاعدة التي يمكن أن تكون شكلاً ما اذا أريد الحصول على المساحة السطحية الكلية غير أن تلك المساحة تختصر أحيانا فيما اذا كان الهرم المعلوم منتظما لان أوجهه تكون في هذه الحالة مثلثات متساوية الساقين ومتساوية وحينئذ فيكتفي الحال لاخذ مساحة أحد هما وضرب الناتج في عددها و يضم الى الناتج مساحة القاعدة في حالة ما اراد الحصول على المساحة السطحية الكلية

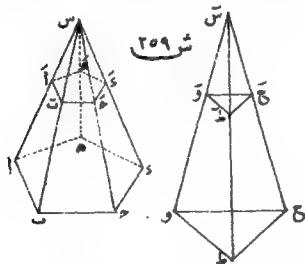
## الفصل السادس

### (في كثيرات السطوح المحدبة)

(٢١٢) متى علمت مساحة الهرم الثلاثي فإنه يمكن بواسطتها الحصول على مساحة أى كثير سطوح محدب معلوم وذلك لأنهما كان كثير السطوح المحدب المعلوم فإنه يمكن تقسيمه الى اهرامات ثلاثية بواسطة مستقيمات تصل بين أحد رؤسه وسائر رؤسه الاخر ولنتكلم الآن عن بعض أحوال خصوصية يكون للساحة فيها قانون بسيط

### دعوى نظرية

(٢١٣) اذا قطع أى هرم بمستو مواز لقاعدته وحذف الهرم الاصغر فإن الهرم الناقص الباقي يتركب من ثلاثة اهرامات متحدة معه فى الارتفاع وأما قواعدها فهي قاعدة الهرم الناقص



العليا والسفلى والوسط المتناسب بينهما  
ليكن  $س-أ-ب-ج-د$  (شكل ٢٥٩)  
هرما مقطوعا بمستوى  $أ-ب-ج-د$   
الموازي لقاعدته وليكن  $س-و-ح-ط$   
هرما آخر ثلاثي متصدا مع الاول فى  
الارتفاع ومكافئه فى القاعدة  
ثم يفرض وجود قاعدتيهما فى مستو  
واحد فإذا مد المستوى القاطع

$أ-ب-ج-د$  فإنه يحدد على الهرم الثانى القاطع  $و-ح-ط$  الذى يكون بعده عن مستوى القاعدة مساويا ضرورة لبعدهم  $أ-ب-ج-د$  عن مستوى القاعدة  $أ-ب-ج-د$  وحينئذ يكون القطعان متكافئين وبناء عليه يكون الهرمان  $س-أ-ب-ج-د$  و  $س-و-ح-ط$  متكافئين أيضا التكافئ قاعدتيهما واتحادهما فى الارتفاع فإذا حذف من الهرمين الكليين كان الباقيان وهما الهرمان الناقصان  $أ-ب-ج-د$  و  $أ-ب-ه-و$  و  $و-ح-ط$  و  $و-ح-ط$  متكافئين واذن فيكفى البرهنة على منطوق النظرية على الهرم الثانى الناقص فنقول

ليكن  $و-ح-ط$  و  $و-ح-ط$  الهرم الثانى الناقص المعلوم (شكل ٢٦٠) فنستورد بالنقط الثلاثة  $و-ح-ط$  تمر بمستو فإنه يحدد أحد الأهرامات الثلاثة الثلاثية  $ط-و-ح-ط$  لأنه متحد



الاهرامات الثلاثية الثلاثة وأما الثاني فهو يكافئ الهرم الذي رأسه م وقاعدته ح و اتحادهما في القاعدة وفي الارتفاع لوجود رأسهما ط و م على مستقيم مواز للقاعدة غير أن هذا الهرم الأخير يمكن اعتباره رأسه د وقاعدته ح وم وهو ممتد مع الهرم الناقص في الارتفاع فإذا برهن على أن قاعدته ح وم وسطه متناسب بين القاعدتين ح ط و د وط ح ثبت المطلوب ولذلك يقال يعدم نقطة م المستقيم م د موازيا ط ح فيكون المثلث وم د = المثلث د ح ط ثم نؤخذ من المثلثين ح ط و د وم المتحدتين في الارتفاع أن

$$\frac{6}{2} = \frac{62}{22}$$

وكذا يؤخذ من المثلثين وح م و وهم المحدثين في الارتقاء أن

$$\frac{10}{20} = \frac{20}{40} = \frac{20}{40}$$

ومن هذين التماسين ينتج

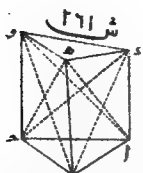
$\frac{٢٤}{٣٢} = \frac{٣}{٤}$  أو  $\frac{٢٤}{٣٢} = \frac{٣}{٤}$  وهو المراد

تنحى ... اذا مرنا بالرمزين و و لقاعدى الهرم الناقص و ع لارتفاعه تحصل

$$\frac{c}{r} = \frac{c}{\frac{1}{2}(u + v + \sqrt{u^2 + v^2})} = \text{مساحة الهرم الناقص}$$

## دعوى نظرية

(٣١٤) كل منشور ثلاثي ناقص يتركب من ثلاث اهرامات ثلاثية متحدة بجمعها معاً في القاعدة السفلى وأما رؤسها فهي رؤس القاعدة العليا (شكل ٢٦١)



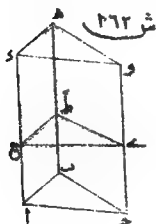
ليكن  $أ ب ح د ه و$  المنشور الثلاثي الناقص المعلوم  
أولاً - المستوى  $ه د ا$  يفصل من الجسم الهرم  $أ ه و$   
وهو أحد الأهرامات الثلاثة الثلاثية والباقي بعد حذفه هو الهرم  
الرابعي  $ه و د ا$  الذي يتقسم بالمستوى  $ه د$  إلى هرمين  
ثلاثيين

ثانياً - الهرم  $ه د ا$  يكافئ الهرم  $ب د ا$  لاتحادهما في القاعدة  $د ح ا$  ولوجود  
رأسهما على المستقيم  $ه د$  الموازي للقاعدة فيكونان مقعدين في الارتفاع غير أن هذا الهرم  
الثاني يمكن اعتباره رأسه  $د$  وقاعدته  $أ ب ح$  وهو ثاني الأهرامات الثلاثية

ثالثاً - الهرم  $ه د و$  يكافئ الهرم  $ب د و$  وهذا يمكن اعتباره رأسه  $د$  وقاعدته  
 $و ح ب$  لكن هذا الأخير يكافئ الهرم  $أ و ح$  لاتحادهما في القاعدة والارتفاع وهو يمكن  
اعتباره رأسه  $و$  وقاعدته  $أ ب ح$  وهو الهرم الثالث

نتيجة ١ - إذا كانت الأحرف  $و ح$  و  $ه د$  و  $د ا$  عمودية على مستوى القاعدة  $ب ح$   
فإن المساحة الكلية للمنشور الناقص تساوي  $\frac{1}{3} أ ب ح د + و ح د + \frac{1}{3} أ ب ح د \times و ح$  هو  
 $+ \frac{1}{3} أ ب ح د \times د ا$  أو تساوي  $\frac{1}{3} أ ب ح (و ح + ه د + د ا)$   
أو إذا رمز بالرمز  $و$  لقاعدة المنشور وبالرموز  $ع$  و  $ع'$  و  $ع''$  للارتفاعات  $و ح$  و  
 $ه د$  و  $د ا$  يحدث

المساحة الكلية للمنشور الناقص  $= \frac{و}{3} (ع + ع' + ع'') = \frac{و}{3} (ع + ع' + ع'')$   
نتيجة ٢ - إذا لم تكن الأحرف عمودية على مستوى القاعدة  $أ ب ح$  كفي (شكل ٢٦٢)



فإنه يقطع المنشور عموداً على أحرفه فينقسم بذلك إلى  
منشورين ناقصين  $ه و ح ط$  و  $أ ب ح ط$  أحرفها  
عمودية على مستوى القاعدة المشتركة ويحدث بناءً على ما تقرر  
في النتيجة الأولى أن

مساحة  $ه و ح ط$   $= ع ط$   $= \frac{(و ح + ه د + د ا)}{3}$   
ومساحة  $أ ب ح ط$   $= ع ط$   $= \frac{(و ح + د ا + د ا)}{3}$   
وتكون المساحة الكلية للمنشور الناقص  $أ ب ح د ه و$   
 $= ع ط$   $= \frac{(و ح + ه د + د ا)}{3}$

أعني أن المساحة الكلية للفسور الناقص تساوي حاصل ضرب القطع العمودي على أحرفه في ثلث مجموع أحرفه الثلاثة

## الفصل السابع ( في التماثل )

### تعاريف

( ٢١٥ ) النقطتان التماثلتان بالنسبة لمستقيم هما اللتان يكون المستقيم الواصل بينهما عمودا على مستقيم التماثل ومنقسماه إلى قسمين متساويين ( شكل ٢٦٣ ) ويسمى مستقيم التماثل بعمود التماثل



الشكل > المماثل للشكل و المعلوم بالنسبة لمحور تماثل هو محل النقط المماثلة لنقط الشكل و بالنسبة لهذا المحور

( ٢١٦ ) النقطتان التماثلتان بالنسبة لنقطة تماثل هما اللتان يكون المستقيم الواصل بينهما مارا بنقطة التماثل ومنقسماه إلى قسمين متساويين ( شكل ٢٦٤ ) ونقطة التماثل هذه تسمى بمركز التماثل

الشكل > المماثل للشكل و المعلوم بالنسبة لمركز تماثل هو محل النقط المماثلة لنقط الشكل و بالنسبة لهذا المركز

( ٢١٧ ) النقطتان التماثلتان بالنسبة لمستو هما اللتان يكون المستقيم الواصل بينهما عمودا على مستوى التماثل ومنقسماه بنقطة تقابله إلى قسمين متساويين ( شكل ٢٦٦ ) ويسمى المستوى المذكور بمستوى التماثل

الشكل > المماثل لآخر معلوم بالنسبة لمستوى تماثل هو محل النقط المماثلة لنقط الشكل و بالنسبة لهذا المستوى

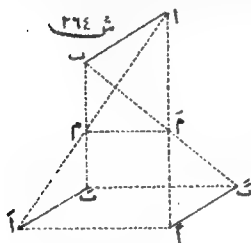
### دعوى نظرية

( ٢١٨ ) الشكلان التماثلان بالنسبة لمحور تماثل متساويان ( شكل ٢٦٣ )

- \* ليكن  $أ$  و  $ب$  و ... الخ نقط الشكل و المعلوم و  $آ$  و  $و$  و ... الخ النقط المماثلة له من الشكل و  $ح$  و  $د$  محور التماثل و دورناه حوله بمقدار زاويتين قائمتين فإن
- \* المستقيم  $أو$  العمودى على محور التماثل لا يزال فى أثناء الدوران و بعده عمودا عليه و حيثئذ
- \* فينتطبق على مساويه  $وا$  و بعين هذا السبب ينطبق أيضا  $بو$  على  $و$  و هكذا
- \* واذن تنطبق جميع نقط الشكل و على مماثلها من الشكل و بعد دورة مقدارها قائمتان
- \* واذن فلا يكون الشكل و شيئا آخر خلافاً للشكل و

## دعوى نظرية

\* (٣١٩) الشكلان المثلثان لثالث النسبة لمركزى تماثل مختلفين متساويان (شكل ٢٦٤)



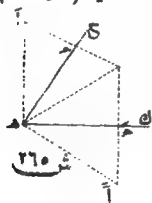
- \* ليكونا  $م$  و  $م'$  مركزى تماثل مختلفين و
- \*  $و$  و ... الخ نقط الشكل و  $آ$  و
- \*  $ب$  و ... الخ النقط المماثلة له من الشكل
- \* و المماثل للشكل و بالنسبة لمركز التماثل
- \*  $م$  و  $آ$  و  $ب$  و ... الخ النقط المماثلة لها
- \* أيضا من الشكل و المماثل للشكل و بالنسبة
- \* لمركز التماثل  $م'$  و المطلوب البرهنة على أن
- \* الشكلين و و متساويان

- \* فيقال حيث أن المستقيم  $م م'$  جامع بين وسطى الضلعين  $اا'$  و  $اا'$  من المثلث  $اا'ا$
- \* فيكون موازيا  $اا'$  و مساويا لضعفه و كذا يكون موازيا  $بب'$  و مساويا لضعفه و هكذا
- \* و حيثئذا أعطى الشكل و حركة انتمالية بحيث ترسم جميع نقطه مستقيمت موازية
- \*  $م م'$  و مساوية لضعفه فإن جميع نقطه تنطبق على المناظرة له من الشكل و و بناء عليه
- \* فالشكلان متساويان وهو المراد

- \* نتيجة ١ - ينتج من هذه النظرية أن تعيين الشكل المماثل لاخر لا يرتبط بمركز تماثل معين
- \* نتيجة ٢ - يمكن أن يستنتج مما ذكره مقدار عظيم من النتائج المهمة وهى
- \* أولا - الشكل المماثل المستقيم معلوم  $اب$  هو مستقيم مساو له و تكون هذه النظرية
- \* بديهية اذا اختير مركز التماثل وسط المستقيم

- \* ثانيا - الشكل المائل لزواوية هو زاوية مساوية لها وتكون هذه النظرية بدئية إذا اختبر رأس الزاوية مركز التماثل
- \* ثالثا - الشكل المائل لكثير أضلاع هو كثير أضلاع مساو له وتنتج هذه النظرية من سابقها
- \* رابعا - الشكل المائل المستوي مستو وتكون هذه النظرية واضحة بنفسها إذا اختبر مركز التماثل على المستوى
- \* خامسا - الشكل المائل لزواوية زوجية هو زاوية زوجية مساوية لها وتكون هذه النظرية بدئية إذا اختبر مركز التماثل على حرف الزاوية الزوجية
- \* سادسا - الشكل المائل لزواوية مجسمة كثيرة الوجة هي زاوية أخرى مجسمة كثيرة الوجة تكون جميع أجزائها متساوية غير أنها متخالفة في ترتيب الوضع
- \* دعوى نظرية

(٣٢٠) الشكلان المائلان لثالث بالنسبة لمستوي تماثل مختلفين متساويان (شكل ٢٦٥)



- \* ليكونا  $\Delta$  مستويي التماثل  $\Delta$  و  $\Delta$  و  $\Delta$  الخ
- \* النقاط المختلفة من الشكل  $\Delta$  و  $\Delta$  و  $\Delta$  الخ
- \* النقاط المناظرة لها من الشكل  $\Delta$  المائل للشكل  $\Delta$  بالنسبة
- \* مستويي التماثل  $\Delta$  و  $\Delta$  و  $\Delta$  الخ النقاط المناظرة
- \* للنقط الأولى أيضا من الشكل  $\Delta$  المائل للشكل  $\Delta$  بالنسبة
- \* لمستويي التماثل  $\Delta$  ويطلب البرهنة على أن الشكلين
- \* و و متساويان

- \* فيقال إذا مر من مستويي المستقيمين  $\Delta$  و  $\Delta$  فانه يكون عمودا على المستويين  $\Delta$  و  $\Delta$
- \* وإذا ن فليكون عمودا على خط تقاطعهما وبذلك تكون زاوية  $\Delta$  هـ  $\Delta$  مقاس الزاوية
- \* الزوجية الواقعة بين المستويين  $\Delta$  و  $\Delta$  ثم إذا وصل  $\Delta$  هـ  $\Delta$  و  $\Delta$  هـ  $\Delta$  فان
- \* المثلث  $\Delta$  هـ  $\Delta$  يكون متساوي الساقين وتكون نقطة  $\Delta$  وسط المستقيم  $\Delta$  وإذا ن
- \* تكون زاوية  $\Delta$  هـ  $\Delta$  = زاوية  $\Delta$  هـ  $\Delta$  وكذا حيث ان المثلث  $\Delta$  هـ  $\Delta$  متساوي الساقين
- \* ونقطة  $\Delta$  في وسط الضلع  $\Delta$  تكون زاوية  $\Delta$  هـ  $\Delta$  = زاوية  $\Delta$  هـ  $\Delta$  وحيث ن
- \* تكون زاوية  $\Delta$  هـ  $\Delta$  =  $\Delta$  هـ  $\Delta$  =  $\Delta$  هـ  $\Delta$  وهكذا

\* اذا قرر هذا وفرض ارتباط الشكل  $\alpha$  بالمستوى  $\beta$  ثم صار تدوير هذا المستوى حول نقطة  $\gamma$  المشتركة بمقدار زاوية تساوي ضعف الزاوية الواقعة بين المستويين فان جميع نقط الشكل  $\alpha$  مثل  $\alpha$  و  $\beta$  و ... الخ تنطبق على النقط  $\alpha$  و  $\beta$  و ... الخ المناظرة لهما من الشكل  $\alpha$  واذن فالشكلان  $\alpha$  و  $\beta$  متساويان وهو المراد

\* نتيجة ١ - ينتج مما ذكر ان تعيين الشكل المائل لا يخلو بربط بمستوى تماثل معين

\* نتيجة ٢ - يمكن ان يستنتج مما تقدم مقدار عظيم من النتائج المهمة وهي

\* أولا - الشكل المائل المستقيم هو مستقيم مساو له وتظهر بداهة هذه النظرية اذا اشتمل مستوى التماثل على المستقيم

\* ثانيا - الشكل المائل لزاوية هو زاوية مساوية لها وتظهر بداهة هذه النظرية اذا اعتبر مستوى التماثل نفس مستوى الزاوية

\* ثالثا - الشكل المائل لمضلع هو مضلع مساو له وتظهر بداهة هذه النظرية اذا اعتبر مستوى التماثل نفس مستوى المضلع

\* رابعا - الشكل المائل لمستو هو مستو وتكون هذه النظرية بدئية اذا اعتبر المستوى الماوم مستوى التماثل

\* خامسا - الشكل المائل لزاوية زوجية هو زاوية زوجية مساوية لها وتسهل البرهنة على ذلك اذا اعتبر المستوى النصف لهما مستوى التماثل

### دعوى نظرية

\* (٢٢١) الشكلان المائلان لثالث أحدهما

\* بالنسبة لمستو وثانيهما بالنسبة لنقطة متساويان

(شكل ٢٦٦)

\* ليكن  $\alpha$  مستوى التماثل وحيث ان اختبار مركز

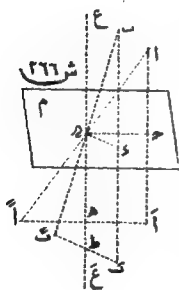
\* التماثل لا يرتبط به تعيين الشكل المائل فنأخذ

\* في نقطة  $\gamma$  على المستوى  $\alpha$  وليكن  $\alpha$  و  $\beta$  و ... الخ

\* نقط الشكل  $\alpha$  و  $\beta$  و ... الخ النقط

\* المناظرة لهما من الشكل  $\alpha$  والمائل للشكل  $\beta$  بالنسبة

\* للمستوى  $\alpha$  و  $\beta$  و ... الخ النقط المناظرة



\* للاولى ايضا من الشكل و المائل للشكل و بالنسبة لمركز التماثل  $\odot$  فنقدم نقطة  
 \* المستقيم ع ع عمودا على المستوى م فنصل  $\odot$  و أ أ فنحيث ان المستقيم  
 \* ع ع عمودا على المستوى فيكون موازيا أ أ وحيث فيكون موجودا بمعلم في المستوى  
 \* أ أ ولكن ه النقطة التي يتقابل فيها مع أ أ ومن حيث ان نقطتي  $\odot$  و  $\odot$   
 \* موجودتان في منصفى المستقيمين أ أ و أ أ فيكون المستقيم أ أ موازيا  $\odot$  و  
 \* وبناء عليه يكون عمودا على ع ع ومن جهة أخرى حيث كانت  $\odot$  منتصف أ أ وكان  
 \* ع ع موازيا أ أ تكون نقطة ه في منتصف أ أ وبناء عليه فيكون النقطتان  
 \* أ و أ متماثلتين بالنسبة لمحور التماثل ع ع وينطبق هذا البرهان على نقط أخرى  
 \* متناظرة من الشكلين و و ويكون الشكلان المذكوران متماثلين بالنسبة لمحور  
 \* التماثل ع ع واذن فهما متساويان (٢١٨)

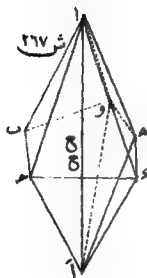
\* نتيجة ١ - ينبع من هذه النظرية ومن المتقدمين عليها أن أى شكل لا يكون له الاشكل  
 \* واحد مماثل له ولايجاد هذا الاخير ينقب امام مستوا أو نقطة للتماثل تكون موافقة للاعمال  
 \* المقضى ابرأوها

\* نتيجة ٢ - يمكن استنتاج نظرية (مرة ٢٢٠) من هذه النظرية لانه اذا كان الشكلان  
 \* و و و مماثلين للشكل و بالنسبة للمستويين ع و ل و اعتبرنا الشكل و المائل  
 \* للشكل و بالنسبة لمركز التماثل  $\odot$  فيكون مماثلا لكل واحد من الشكلين و و و  
 \* واذن فيكونان متساويين

### \* دعوى نظرية

\* (٢٢٢) كثيرا السطوح التماثلان يكون فيهما  
 \* أولا - الواجه المتناظرة متساوية - وثانيا - زواياهما الزوجية المتناظرة متساوية  
 \* وثالثا - أحرفهما المتناظرة متساوية - ورابعا - تكون زواياهما المجسمة م كبة  
 \* من أجزاء متساوية وموضوعة في جهات متضادة  
 \* وهذه النظرية تنبع مما سبق ذكره من أن الشكل لا يكون له الاشكل واحد مماثل له فقط  
 \* ومن النتائج التي ذكرت (بفرق ٣١٩ و ٣٢٠ نتيجة ٢)  
 \* نتيجة - كثيرا السطوح التماثلان يتركبان من عدد واحد من الازامات الثلاثية المتماثلة  
 \* لانه اذا تشكل من أربع نقط من الشكل و هرم ثلاثى فان النقط المماثلة لهما من الشكل و  
 \* يتركب منها هرم ثلاثى أيضا

## دعوى نظرية



- \* (٢٢٣) كثير السطوح المتماثلان متكافئان (شكل ٢٢٧)
- \* أولا - نفرض هـ ما معلوما أ ب د هـ و نرسم الهرم
- \* المتماثل له يجعل قاعدته ب د هـ و مستوى التماثل فيشكل
- \* من ذلك الهرم أ ب د هـ و المتدمع الاول في القاعدة
- \* وفي الارتفاع لان  $أ ح = أ د$  فيكونان متكافئين
- \* ثانيا - حيث ان كثيرى السطوح المتماثلين يتركبان من
- \* عدد واحد من الاهرامات الثلاثية المتماثلة فهما اذن
- \* متكافئان

## الفصل الثامن

(في التشابه)

## تعريف

- \* (٢٢٤) كثيرا السطوح المتشابهان هما اللذان تكون أوجههما المتناظرة متشابهة
- \* وزواياهما الجسم المتناظرة متساوية ونعني هنا بالزوايا الجسم المتناظرة الزوايا الجسم
- \* التشكلة من الواجه المتناظرة المتشابهة وتسمى رؤس زوايا هذه الجسم بالرؤس المتناظرة
- \* والمستقيمات الواصلة بين رؤس متناظرة تسمى بالمستقيمات المتناظرة والواجه المتناظرة هي
- \* الواجه التي تكون متشابهة والزوايا الزوجية المتناظرة من كثيرى السطوح المتشابهين
- \* متساوية

- \* (٢٢٥) حيث ان الزوايا الجسم المتناظرة متساوية على مقتضى تعريف تشابه كثيرى
- \* السطوح فتكون الاجزاء المتساوية فهما موضوعة على ترتيب واحد واذن فتكون الواجه
- \* المتناظرة من كثيرى السطوح المتشابهين موضوعة على نظم وترتيب واحد

## دعوى نظرية

- \* (٢٢٦) اذا قطع هرم بمستو مواز لقاعدته فانه يحدد عليه هـ ما جديدا متشابه للاول
- \* (شكل ٢٢٨)



\* فإذا قطع الهرم س أ ب ح د ه و بمستو مواز قاعدته فإنه يبرهن على أن الهرم س أ ب ح د ه و مشابه للاول

\* ولذلك يقال أولاً أنه بناء على ما تقدم (بفقرة ٢٠٩)

\* تكون أوجه الهرمين متشابهة النظر لنظيره

\* ثانياً - ان فيهما الزاوية المجسمة من مشتركة

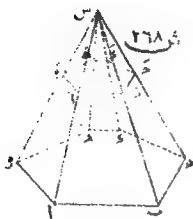
\* ولأن الزوايا المستوية المتناظرة من المجسمين

\* ١ و ١ متساوية وموضوعة على ترتيب واحد تكونان

\* متساويتين وكذلك تساوى فيهما باقى الزوايا المجسمة

\* المتناظرة أى ان  $\angle \alpha = \angle \alpha'$  و  $\angle \beta = \angle \beta'$  و  $\angle \gamma = \angle \gamma'$

\* وهكذا وبناء عليه فيكون الهرمان متشابهين (٢٢٤)



### دعوى نظرية

\* (٢٢٧) يتشابه الهرمان الثلاثيان اذا تساوى منهما زاويتان زوجيتان متناظرتان وكاتا

\* محصورتين بين أوجه متشابهة فيهما موضوعة على ترتيب واحد (شكل ٢٦٩)

\* اذا كانت الزاوية الزوجية أ ب تساوى

\* الزاوية الزوجية أ ب وكان الوجه أ ب ح

\* مشابهاً للوجه أ ب ح والوجه أ ب د

\* مشابهاً للوجه أ ب د يكون الهرمان

\* متشابهين

\* وللبرهنة على ذلك يؤخذ البعد أ ب = البعد

\* أ ب ويمر من نقطة ب' مستو مواز لقاعدة

\* ب ح د فالهرم الثلاثي أ ب ح د يكون

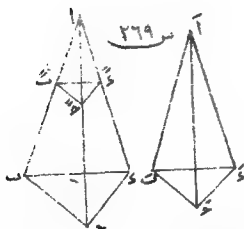
\* على مقتضى النظرية السابقة مشابهاً للهرم

\* أ ب ح د وبناء عليه فقد آل الامر الى البرهنة على أن الهرم أ ب ح د مساو للهرم

\* أ ب ح د وللوصول الى ذلك يقال ان الثلاثين أ ب ح د و أ ب ح د فهما أ ب ح د

\* عملاً والزاوية ب' أ ح = ب' أ ح فرضاً والزاوية أ ب ح = أ ب ح

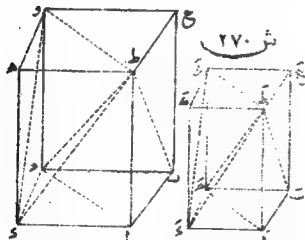
\* فرضاً أيضاً واذن فهما متساويان وبمثل ذلك يبرهن على تساوى الثلاثين أ ب ح د و أ ب ح د



- \* وحيث كانت الزاوية الزوجية  $أ ب$  تساوى الزوجية  $ا ب$  فرضا فيكون الهرمان
- \* الثلاثيان  $ا ب ح$  و  $أ ب ح$  متساويين
- \* نتيجة - يمكن ارتكنا على هذه النظرية وعلى ما قيل في تعريف كثيرات السطوح المتشابهة
- \* أن يبرهن على النظريات الآتية وهي
- \* الاولى - يشابه الهرمان الثلاثيان اذا تناسبت أحرفهما المتناظرة وتشابهت وضعها
- \* الثانية - يشابه الهرمان الثلاثيان اذا شابه وجه من أحدهما نظيره من الآخر وكانت
- \* الزوايا الزوجية الثلاثة المجاورة مساوية لتظايرها من الثاني ومتشابهة وضعها
- \* الثالثة - يشابه الهرمان الثلاثيان اذا تساوت فيهما جميع الزوايا الزوجية المتناظرة
- \* وتشابهت وضعها

### دعوى نظرية

- \* (٢٢٨) كثيرا السطوح المركبان من عدد واحد من الاهرامات الثلاثية المتشابهة صورة
- \* ووضعها متشابهان أعني أن أوجههما المتناظرة متشابهة وزواياهما المجسمة المتناظرة
- \* متساوية (شكل ٢٧٠)



- \* ليكن  $ط ا ب ح$  و  $ط ا د ح$
- \*  $ط ح د$  و  $ط د ه و$  و... الخ
- \* الاهرامات المتركب منها كثير
- \* السطوح الاول و  $ط ا د ح$
- \* و  $ط ح د$  و  $ط د ه و$  و... الخ
- \* الاهرامات المتركب منها كثير
- \* السطوح الثاني

- \* أولا - المثلثان  $د ح ا$  و  $ا ح ب$  المتركب منهما الوجه  $ا ب ح$  من كثير السطوح
- \* الاول يشابهان مع السطوح المثلثين  $د ح ا$  و  $ا ح ب$  الموجودين على سطح كثير السطوح
- \* الثاني بسبب تشابه الاهرامات الثلاثية وزيادة على ذلك حيث ان المثلثين  $د ح ا$  و  $ا ح ب$
- \* موجودان في مستوا واحد فيجب أن يكون المثلثان  $د ح ا$  و  $ا ح ب$  كذلك
- \* ولبرهنة على ذلك يقال حيث ان الهرمين الثلاثين  $ط ح ا$  و  $ط ا ب ح$  يشابهان
- \* الهرمين  $ط ح ا د$  و  $ط ا ب ح$  فرضا فتكون الزاويتان الزوجيتان  $ط ح ا$  و

\* و ط ح ا ب مساويتين بالتناظر للزوجيتين ط ح ا د و ط ح ا ب وحيث كان مجموع  
 \* الاولين مساويا فاثنتين فيكون مجموع الاخرين كذلك وبناء عليه فيكون كثيرا الاضلاع  
 \* ا ب ح و ا ب د و ك د متشابهين لتركبهما من عدد واحد من المثلثات المتشابهة صورة ووضعها  
 \* وبمثل ذلك يبرهن على تشابه باقي أوجه كثيرى السطوح ما خونة مثنى

\* ثانيا - يشاهد أن الزوجية ط ا التي هي مجموع الزوجيتين ط ا د و ط ا ب  
 \* تساوى للزاوية الزوجية ط ا مجموع الزوجيتين ط ا د و ط ا ب وعلى الغوم  
 \* كل زوجيتين متناظرتين من كثيرى السطوح متساويتان لانها عبارة عن مجموع زوايا  
 \* زوجية متناظرة متساوية ومن ذلك يتبع أن الزوايا المجسمة المتناظرة متساوية مثل ا و ا  
 \* لتساوى الزوايا المستوية قيمها المتناظرة ولتشابهها وضعها مع تساوى ميلها على بعضها

### \* دعوى نظرية

\* (٣٢٩) وبالعكس - كثيرا السطوح المتشابهة ان يتربكان من عدد واحد من الاهرامات  
 \* الثلاثية المتشابهة صورة ووضعها (شكل ٢٧٠)

\* اذا اعتبرنا ط رأسا لكثير السطوح ا ب ح د ه و ح ط وقسمنا أوجهه الغير المجاورة  
 \* للرأس ط الى مثلثات واعتبرنا كل واحد منها قاعدة لهم ثلاثى رأسه ط فان كثيرا السطوح  
 \* المذكور ينقسم الى اهرامات ثلاثية يتكون من مجموعها الجسم المذكور  
 \* ولواجز ينماثل ذلك في كثير السطوح الثانى فاننا نشاهد انقسامها الى عدد واحد من  
 \* الاهرامات الثلاثية ولم يبق علينا سوى البرهنة على أن كل اثنين منها متناظرتين في الجسمين  
 \* متشابهين

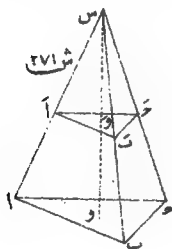
\* ولذلك يقال اذا قارنا الهرم الثلاثى ط ح ا بالهرم الثلاثى ط د ح ا نشاهد ان  
 \* المثلثين ط د ا و ح د ا يشابهان بالتناظر للثلثين ط د ا و د ح ا بسبب تشابه  
 \* الوجهين ه د ا ط و ه د ا ط من جهة والوجهين ح د ا ب و ح د ا ب من  
 \* جهة أخرى وأن الزاوية الزوجية د ا = الزاوية الزوجية د ا فرضا وحيث قد فيكون  
 \* الهرمان المذكوران متشابهين (٣٢٧)

\* ثم اذا اتقلنا الى الهرمين الثلاثيين ط د ح و و ط د ح و نشاهد فيهما تشابه المثلثين  
 \* ط د ح و ط د ح لانهم اوجهان متناظران من هرمين ثلاثيين متشابهين وكذا نشاهد  
 \* تشابه الوجه د ح للوجه د ح بسبب تشابه كثيرى الاضلاع ه د ح و ه د ح و ه د ح و

- \* وغير ذلك فان الزوجيتين و د ا و د ك ح ا متساويتان فرضا والزوجيتان ط و ح ا و ط ك د ح ا متساويتان بسبب تشابه الهرمين ط و د ا و ط ك د ح ا واذن يكون الهرمان الثلاثيان ط و د و و ط ك د ح و متشابهين وهكذا
- \* تنبيه ١ - وما يجب ملاحظته هنا هو أن التحليل المتقدم يمكن اجراؤه باعتبار أي رأسين متناظرين من كثيرى السطوح غير الرأسين ط و ط كأنهم مارأسان للجسمين
- \* تنبيه ٢ - ينتج من هذه النظرية أن النسبة بين أى مستقيمين متناظرين ا و آ مثلا واصليين رأسين متناظرين من كل من كثيرى السطوح المتشابهين هي كالنسبة بين أى حرفين ب و ب متناظرين فيهما وذلك لان المستقيمين المذكورين لابد أن يكونا حرفين متناظرين من هرمين ثلاثيين متشابهين عند تحليل كثيرى السطوح الى اهرامات ثلاثية متشابهة وحيث ان هذين الهرمين لابد أن يشتملا على حرفين متناظرين ح و ح مثلا من كثيرى السطوح فيحدث  $\frac{ا}{ب} = \frac{آ}{ب}$  وحيث ان أحرف كثيرى السطوح متناسبة فرضا لانهم متشابهان يكون  $\frac{ب}{ب} = \frac{ح}{ح}$  أو  $\frac{ب}{ب} = \frac{ح}{ح}$  وهو المراد

### دعوى نظرية

- \* (٣٣٠) النسبة بين الهرمين الثلاثيين المتشابهين كالنسبة بين مكعبى حرفين متناظرين منهما (شكل ٢٧١)



- \* حيث ان الهرمين المذكورين متشابهان فانه يمكن وضع أصغرهما على الأكبر بحيث تكون الزاوية المشتركة بينهما واذن فتكون القاعدة ا ب ح موازية للقاعدة ا ب ح لانقسام الاحرف
- \* س ا و س ب و س ج الى أجزاء متناسبة في
- \* النقط ا و ب و ج ثم يقال اذا رمزنا بالرمزين ح و ح لجزئى الهرمين و و و لقاعدتهما
- \* حدث

$$ح = \frac{ا}{ب} \times و و ح = \frac{آ}{ب} \times و س و س و ا و$$

$$\frac{ح}{و} = \frac{ا}{ب} \times \frac{و}{و} = \frac{ا}{ب} \times \frac{و}{و} = \frac{ا}{ب}$$

\* وحيث ان القاعدتين  $ق$  و  $ق'$  متشابهتان يكون

$$\frac{ق}{ق'} = \frac{أب}{أ'ب'} \text{ وكذا } \frac{ق}{ق'} = \frac{س}{س'} \text{ واذن يكون } \frac{ق}{ق'} = \frac{س}{س'}$$

\* وهو المراد

### دعوى نظرية

\* (٣٣١) النسبة بين كثيرى السطوح المتشابهين كالنسبة بين مكعبى حرفين متناظرين منهما من المعلوم أن كثيرى السطوح المتشابهين يتركبان من عدد واحد من الاهرامات الثلاثية المتشابهة صورة ووضعاً فإذا دلت الرموز  $ه'$  و  $ه''$  و  $ه'''$  و  $ه''''$  ... الخ على اهرامات كثير السطوح الاول  $س$  و  $س'$  و  $س''$  و  $س'''$  و  $س''''$  ... الخ على اهرامات كثير السطوح الثانى  $أ$  و  $أ'$  و  $أ''$  و  $أ'''$  و  $أ''''$  ... الخ على احرف الاهرامات الاولى  $ب$  و  $ب'$  و  $ب''$  و  $ب'''$  و  $ب''''$  ... الخ على الاحرف المتناظرة لهما من الثانية حدث

$$\frac{س}{س'} = \frac{ه'}{ه''} \text{ و } \frac{س}{س'} = \frac{ه''}{ه'''} \text{ و } \frac{س}{س'} = \frac{ه'''}{ه''''} \text{ و } \frac{س}{س'} = \frac{ه''''}{ه'''''} \text{ و } \dots \text{ الخ}$$

\* وحيث ان الاحرف المتناظرة من كثيرى السطوح متناسبة يحدث

$$\frac{س}{س'} = \frac{ه'}{ه''} = \frac{ه''}{ه'''} = \frac{ه'''}{ه''''} = \dots \text{ أو}$$

$$\frac{س}{س'} = \frac{ه'}{ه''} = \frac{ه''}{ه'''} = \frac{ه'''}{ه''''} = \frac{ه''''}{ه'''''} = \dots \text{ الخ أو } \frac{س}{س'} = \frac{ه'}{ه''} = \frac{ه''}{ه'''} = \frac{ه'''}{ه''''} = \frac{ه''''}{ه'''''} = \dots \text{ الخ وهو المراد}$$

## الفصل التاسع

(تفسيرات)

١ - المطلوب تعيين قطر متوازى المستطيلات اذا كانت مقادير احرف الثلاثة المتجاورة هي

$$١ = ٢٠ \text{ متر و } ٣ = ٨٠ \text{ متر و } ٥ = ٦٠ \text{ متر}$$

٢ - المطلوب البرهنة على أن قطر المكعب يساوى حاصل ضرب أحد احرافه فى  $\sqrt{٣}$

٣ - ما مقدار زنة الهواء الموجود فى أداة طولها ٥ متر وعرضها ٤ متر وارتفاعها ٣,٢٠ متر

اذا كان اللتر الواحد من الهواء يزن ١,٢٩ غراما

- ٤ - إذا دل عدد ١٦,٦٠٤ متر مكعب على مساحة متوازي مستطيلات والمطلوب معرفة أبعاد الثلاثة إذا علم أنهم مناسبة للقادر  $\frac{1}{8}$  و  $\frac{5}{4}$  و  $\frac{5}{6}$
- ٥ - إذا كان مقدار قطر أحد أوجه المكعب مساويا ٤ متر والمطلوب حساب مساحته الخجمية
- ٦ - إذا ملي أناء على شكل مكعب من الكؤل وكانت زنتهما معا تعادل ٥٢,٦٨٨ كيلوغراما وزنة الاناء وحده تعادل كيلوغرامين والمطلوب معرفة عمق هذا الاناء إذا كانت كثافة الكؤل هي ٧٩٢ ر.
- ٧ - ما مساحة حجم المنشور الثلاثي الذي ارتفاعه ٥ متر وقاعدته مثلث متساوي الاضلاع طول ضلعه ٥ متر
- ٨ - إذا كانت قاعدة منشور ثلاثي مثلثا متساوي الاضلاع ضلعه ٥ وكان ارتفاعه ضعف ارتفاع المثلث المذكورالمعتبر قاعدة والمطلوب إيجاد قانون مساحته الخجمية
- ٩ - المطلوب تعيين مساحة حجم المنشور الذي ارتفاعه ٣ متر وقاعدته مربع مرسوم داخل دائرة نصف قطرها متران
- ١٠ - إذا كان ارتفاع هرم يساوي ١٥ مترا ومساحة قاعدته تساوي ١٦٩ متر مربعاً فعلى أي بعد من رأسه يجب قطع هذا الهرم بمستو مواز لقاعدته بحيث تكون مساحة القطع تساوي ١٠٠ متر مربع
- ١١ - إذا ساوت مساحة قاعدة هرم ١٤٤ متر مربعاً وقطع بمستو مواز لقاعدته على بعد أربعة أمتار من رأسه وكانت مساحة القطع الحادث تساوي ٦٤ متر مربعاً فمقدار طول ارتفاع الهرم
- ١٢ - إذا دل عدد ١٢ متراً على ارتفاع هرم قاعدته مربع ضلعه ٨ أمتار فمقدار مساحة القطع الحادث من مستو مواز لقاعدته على بعد أربعة أمتار من رأسه
- ١٣ - إذا دل عدد ١٤ متراً على الارتفاع المشترك لهرمين قاعدة الاول مربع طول ضلعه ٩ متر وقاعدة الثاني مسدس طول ضلعه ٧ متر فمقدار مساحتي القطعين الحادثين لهذين الهرمين إذا قطع كل منهما بمستو مواز لقاعدته على بعد ستة أمتار من رأسه
- ١٤ - إذا دل عدد ٨ متر على طول أحد أحرف هرم وأخذ عليه بالابتداء من الرأس بعد يساوي خمسة أمتار وممن نهاية هذا البعد مستو مواز لقاعدة الهرم والمطلوب معرفة النسبة الكائنة بين السطحين الخارجيين للهرمين الأصغر والكامل

- ١٥ - المطلوب تقويم هرم ثلاثي منتظم من الفضة طول حرفه يساوى ٦ ر. ٠ متر ( كثافة الفضة هي ١٠.٤٧ وقيمة الكيلوغرام الواحد منها يعادل ٢٢٠,٥٥ فرنكا )
- ١٦ - المطلوب إيجاد المساحة الخجمية لهرم رباعي منتظم طول ضلع قاعدته ٦ متر وطول أحد أحرفه ٥ متر
- ١٧ - إذا كانت قاعدة هرم شكلا مسدسا منتظما طول أحد أضلاعه ٣ متر والمطلوب أولا معرفة الارتفاع اللازم إعطاؤه لهذا الهرم حتى تكون مساحته السطحية عشرة أمثال مساحة القاعدة وثانيا معرفة المساحة الخجمية له
- ١٨ - إذا كان قاعدتا هرم ناقص شكلين مسدسين منتظمين ضلع أحدهما ٦ متر واحد وضلع الثاني متران والمطلوب حساب ارتفاع الهرم إذا كانت مساحته الخجمية تساوى ١٢ مترامكعبا
- \* ١٩ - ما مقدار طول حرف المكعب الذى تكون مساحته الخجمية ضعف مساحة مكعب معلوم طول حرفه ٥ متر
- \* ٢٠ - إذا فرض هرم ناقص قاعدتا ه شكلان مئمانان منتظمان وطول أحد أضلاع القاعدة العليا ٤ ر. ٠ متر وطول أحد أضلاع القاعدة السفلى ٣ ر. ٠ متر وارتفاع الهرم الناقص ٥ ر. ٠ متر والمطلوب معرفة حجم الهرم الكامل
- \* ٢١ - المطلوب معرفة حجم الهرم الناقص الذى ارتفاعه ٩ ر. ٠ متر وقاعدتا ه شكلان مئمانان منتظمان ضلع احدهما ٨ ر. ٠ متر وضلع الثانية ٥ ر. ٠ متر

(تم الجزء الثالث من كتاب التحفة البهية و يليه الجزء الرابع ان شاء الله تعالى)

٩٢ فهرست الجزء الثالث من التحفة البهية

صفحة	صفحة
٤٩ الفصل الثالث في مستأنح مثلثات والمضلعات الكروية	٣ الجزء الثالث من التحفة البهية في المستوى والزوايا المجسمة والكرة وكثيرات السطوح
٥٣ الفصل الرابع في الاقواس المتعامدة	٣ الباب الاول في المستوى والزوايا المجسمة
٥٥ الفصل الخامس في الدوائر الصغيرة	٣ الفصل الاول في المستوى وتعيينه
٥٧ الفصل السادس في بعض مسائل عملية تطبيقية	٤ الفصل الثاني في المستقيمات والمستويات المتوازية
٥٩ الفصل السابع تمرينات	٩ الفصل الثالث في المستقيمات والمستويات المتعامدة
٦٠ الباب الثالث في كثيرى السطوح	١٤ الفصل الرابع في مسقط النقطة والمستقيم
٦٠ الفصل الاول تعاريف	١٦ الفصل الخامس في الزوايا الزوجية
٦١ الفصل الثاني في المبادئ	١٩ الفصل السادس في المستويات المتعامدة
٦٥ الفصل الثالث في قياس حجم متوازى السطوح	٢٣ الفصل السابع في الزوايا المجسمة
٧٠ الفصل الرابع في قياس المنشور	٣٢ الفصل الثامن تمرينات
٧٢ الفصل الخامس في قياس الهرم	٣٣ الباب الثاني في الكرة
٧٦ الفصل السادس في كثيرات السطوح المحدبة	٣٣ الفصل الاول في القطع المستوي للكرة
٧٩ الفصل السابع في القمائل	٣٨ الفصل الثاني في المثلثات وكثيرى
٨٤ الفصل الثامن في التشابه	الاضلاع الكروية
٨٩ الفصل التاسع تمرينات	

(تت)









Bibliotheca Alexandrina



0519741